様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２２年６月７日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2007 ～ 2009
課題番号：19760051
研究課題名（和文） Riemann 不変量多様体に基づく無反射境界条件の構築
研究課題名（英文） Development of a nonreflecting boundary condition based on the Riemann invariant manifold

研究代表者
谷口 隆晴 （YAGUCHI TAKAHARU）
東京大学・大学院情報工学系研究科・助教
研究者番号：10396822

研究成果の概要（和文）：圧縮流体シミュレーションで重要となる無反射境界条件について、Riemann 不変量多様体に基づいた無反射境界条件を導出した。また、得られた方法は安定性に問題があったため、それを改善する修正を行ったところ Thompson の無反射境界条件と呼ばれる既存の方法に一致し、その結果、Thompson の境界条件に関する知見を得た。また、安定な実装法の開発を目指して離散変分法についての研究も行った。その結果、離散変分法をいくつかの点で拡張することに成功した。

研究成果の概要（英文）：Nonreflecting boundary conditions are of importance in numerical simulations of compressive fluid. In this research I developed a new nonreflecting boundary condition based on the Riemann invariant manifold. An improvement of this boundary condition was found to be same as Thompson's boundary condition, and this provided a new derivation of Thompson's boundary condition and a stability analysis. Researches on the discrete variational method are also performed in order to stabilize this boundary condition. As a result, some extensions of the discrete variational method are achieved.

交付決定額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
２００７年度	1,600,000	0	1,600,000
２００８年度	900,000	270,000	1,170,000
２００９年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総 計	3,400,000	540,000	3,940,000

研究分野：工学
科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎・工学基礎
キーワード：数理工学，無反射境界条件，Riemann 不変量多様体，圧縮流体

１．研究開始当初の背景

波のシミュレーションを行う際、計算機のメモリは高々有限であるため、計算対象とする領域は有限で打ち切られなくてはならない。このときに問題となるのが、打ち切り断面という人工的な境界上での境界条件の設定方法である。この境界は現実には存在していないため、物理的な境界条件は存在しない従って、何らかの人工的な取り扱いが必要となるが、安直な方法では反射波が生じてしま

い、正しい流れが計算できない。そのため、実際のシミュレーションでは、いかに境界上で反射波の発生を防ぐかが重要視される。

反射波の発生を防ぐような境界上での取り扱いは無反射境界条件と呼ばれるが、無反射境界条件の作り方の、よく用いられる考え方の一つとして、波の進行方向を解析することによって、境界からの波の進入を防ぐというものがある。この考え方に基づいた方法は比較的良い性能をもつものの、波の進行方向の推定に問題があった。

２．研究の目的

本研究の目的は、前述の、既存の方法における波の進行方向の推定についての問題を克服し、圧縮流体のシミュレーションにおける新たな、より強力な無反射境界条件の構築すること、また、開発した境界条件を実用に耐えるよう、安定な方法で離散化することである。

３．研究の方法

本研究では、近年、Lappas らによって提案された Riemann 不変量多様体の考え方を波の伝播方向の解析に用いることで、新たな無反射境界条件の構築を試みた。

既存の方法の多くで用いられている波の伝搬方向の解析方法は、特性曲線法を用いて波を進行方向ごとに分解するというものであった。この方法を用いた場合、波を進行方向ごとに分解する際、解が単純波であるという仮定がおかれることが多い。単純波という仮定は十分遠方の音波や渦などといった、重要な現象を記述するものではあるが、しかし、実際にシミュレーションを行う際には、必ずしも成立するとは限らない仮定であり、改善が望まれていた。

これに対して、Riemann 不変量多様体を用いた理論では、今までの解析で用いられていた特性多様体とは異なる多様体を導入することで、特性曲線法を用いた場合とは別の波の分解を与える。その際、新たに解の滑らかさに関する仮定が必要となるものの、単純波という仮定は必要とはならない。そのため、この理論を応用すれば、解の滑らかさという、より自然な仮定の下で反射を防ぐ手法が構築できると期待される。

この理論に基づいて、実際に新しい無反射境界条件を構築してみたところ、この境界条件を用いた場合、シミュレーションの安定性に問題があることが分かった。そこで、この問題を改善するため、

- より安定となるように、境界条件を修正すること
- 安定な実装となるよう、離散化時に工夫すること

という２つのアプローチを試みた。

１つ目のアプローチでは境界条件を満たすような解の理論的な評価を行い、解が安定となるように境界条件を修正した。解の理論的な評価には、流体方程式のような非線形双曲型方程式系の解析に用いられている標準的な方法を、いくつか組み合わせて応用した。

２つ目のアプローチでは、国産の数値解法である離散変分法を応用することを目的とし、これの研究を行った。離散変分法は阪大の降旗、東大の松尾らによって開発されてきた方法であり、偏微分方程式のもつ構造を保存するように数値計算スキームをデザインすることで、安定なスキームを導出することができる方法である。離散変分法はこれまで 1 次元の問題への適用が主であったが、これを多次元の流体方程式に応用することができれば、安定な離散化法が得られると期待される。そこで、この方法の拡張に関する研究を行った。

４．研究成果

本研究では、Riemann 不変量多様体に基づいて実際に新しい無反射境界条件を構築した。得られた無反射境界条件は安定性に問題があることが分かったため、これを安定化させることを試み、その過程で、以下のような成果を得た。

（1）構築した Riemann 不変量多様体に基づく無反射境界条件について、この境界条件を用いた場合の解の評価を行った。また、得られた評価に基づき、解がより安定となるように境界条件を改良した。この改良された無反射境界条件は、一見、全く異なる形をしているが、既存の無反射境界条件で、今日でもしばしば用いられている Thompson の無反射境界条件と等価であることが分かった。Thompson の無反射境界条件は、よく利用される方法であるものの、その導出法はあまり自然なものではなく、本質的に１次元的な方法であるといわれていた。また、その性能評価もあまりなされていなかった。

これに対し、上記の結果、本研究によって、Thompson の無反射境界条件の別導出と新しい表現を得ることができたことになる。

新たに得られた導出法は、計算対象領域の外には波は存在しないと仮定して境界条件をデザインするという、自然なアイデアに基づくものである。そのため、これまで不自然だと思われていた Thompson の無反射境界条件が、Thompson とは別の、自然な方法で導出できることが明らかとなった。

また、この新しい導出法で導出された境界条件は Thompson の境界条件とは、一見、全く別の形をしている。すなわち、これによって、Thompson の境界条件の新しい表現が得られたことになる。この新しい表現は解の理論

的な評価をやりやすくするような形をしており、実際、この表現を用いて方程式の解を評価したところ、自然な仮定の下で成り立つ、ある種の安定性評価を得ることができた。Thompson の無反射境界条件は、実用上、安定に動くことが多いが、その理由はあまり明らかになっていなかった。これに対し、本研究の結果、Thompson の境界条件の安定性に関して、一つの説明が与えられた。

（２）無反射境界条件の安定な離散化法と実装法を開発するため、離散変分法の研究を行った。その結果、離散変分法に関する下記のような拡張と新たな構造保存型スキーム導出法の開発に成功した。

① 離散変分法を Ostrovsky 方程式という、ハミルトニアンに積分項を含むような方程式に拡張した。このような項に依存したハミルトニアンは、これまで取り扱われておらず、また、他にも、同様の項をもつような方程式がいくつか存在しているようであり、本研究の結果、離散変分法の適用範囲を、そのような方程式を含むものに拡張することができた。

② 離散変分法は、これまで、等間隔格子上での開発が主であった。これに対し、本研究では、離散変分法を、不等間隔格子や任意の多角形メッシュ上で用いることができるように拡張した。これらの拡張の結果、計算対象領域の分割が容易になり、等間隔格子では対応が難しかった、多次元の複雑領域上でのシミュレーションが可能となった。

具体的には、まず、logically rectangular mesh と呼ばれる、不等間隔格子のうちで、直交格子への写像が存在するような格子への拡張を行った。拡張には、写像法と呼ばれるテクニックを用いた。これによって２次元中のドーナツ型領域などといった領域上でのシミュレーションが可能となり、実際に、うまくいくことを Cahn-Hilliard 方程式について実装することで確かめた。

また、ミメティックスキームや離散外微分解析といった方法を応用することで、より様々なメッシュが利用できるような枠組みへの拡張を行った。この方法では、対象となる方程式が場の方程式に限られるものの、少なくとも理論的には、任意の多面体メッシュが利用できる。また、実際に、２次元領域中の場合についてではあるが、三角形メッシュや三角形と四角形が混在した混合メッシュを用いた場合についてのスキームを導出し、Cahn-Hilliard 方程式や非線形 Schrödinger 方程式について実装することで、その性能の評価を行った。

③ 離散変分法をハミルトン偏微分方程式に適用する際には、ハミルトン力学で自然に現れるような形に方程式を変形してから適用する。その意味で、ハミルトン力学的な側面が強い方法である。ハミルトン力学と双対な理論としてラグランジュ力学がよく知られているが、ラグランジュ力学を用いた枠組みで、離散変分法と同様に構造保存型スキームを導出するための方法の構築を試み、実際にいくつかの方程式について適用できることを確認した。離散変分法では、特に工夫をしない限り、スキームは非線形となり、連立非線形方程式の数値解法が必要となる。これは、計算コストを増大させてしまうのであまり望ましくない。しかし、新しい方法では、特に工夫しなくても、自然に線形なスキームが導出されることが多い。そのため、少ない計算コストで安定性に優れたスキームを導出する方法として、今後、応用が期待できる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① T. Yaguchi, T. Matsuo and M. Sugihara, Conservative Numerical Schemes for the Ostrovsky Equation, J. Comput. Appl. Math., refereed, 234 (2010) 1036 - 1048.

② T. Yaguchi, T. Matsuo and M. Sugihara, An Extension of the Discrete Variational Method to Nonuniform Grids, J. Comput. Phys., refereed, 229 (2010) 4382 - 4423.

③ 谷口隆晴, 松尾宇泰, 杉原正顯, 離散変分法の非一様格子への拡張, 応用数理学会論文誌, 査読有, 19 (2009) 371 - 431.

④ 谷口隆晴, 非粘性圧縮流体の等エントロピー流れにおけるある人工的境界条件とその Thompson の無反射境界条件との関係について, 応用数理学会論文誌, 査読有, 18 (2008) 447 - 471.

⑤ 谷口隆晴, 波動現象シミュレーションのための無反射境界の作り方, シミュレーション, 査読無, 26（2007）84 - 89.

〔学会発表〕（計 17 件）

① T. Yaguchi, Symmetry-Based Method to Derive Conservative Numerical Schemes for the Euler-Lagrange PDEs, 2010 Tokyo Workshop on Structure-Preserving Methods, Tokyo, Japan, 23 Mar. 2010.

② T. Yaguchi, T. Matsuo and M. Sugihara, An Energy Conservative Numerical Scheme on Mixed Meshes for the Nonlinear Schrödinger Equation, 7th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, Crete, Greece, 19 Sep. 2009.

③ T. Yaguchi, Challenge for Multi-Dimensional Cases II: on Non-Uniform Meshes, Workshop on Structure-Preserving Methods for Partial Differential Equations, Tokyo, Japan, 17 Mar. 2009.

④ T. Yaguchi, T. Matsuo and M. Sugihara, The Discrete Variational Derivative Method for a Class of Equations with Nonlocal Conservation/Dissipation Properties, 13th International Congress on Computational and Applied Mathematics, Ghent, Belgium, 10 Jul. 2008.

⑤ 谷口隆晴，等エントロピー流れにおける Riemann 不変量多様体を用いた無反射境界条件について，日本応用数理学会 2008 年 研究部会 連合発表会，東京，2008 年 3 月 8 日．

⑥ T. Yaguchi, Characteristic non-reflecting boundary conditions for multi-dimensional quasi-linear hyperbolic systems, 6th International Congress on. Industrial and Applied Mathematics, Zürich, Switzerland, 16 Jul. 2007.

〔図書〕（計 0 件）
〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
該当なし。

６．研究組織
(1)研究代表者
谷口　隆晴（YAGUCHI TAKAHARU）
東京大学・大学院情報理工学系研究科・助教
研究者番号：10396822