様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年４月１日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）
研究期間：2007〜2008
課題番号：１９８４０００５
研究課題名（和文）　半単純リー群の格子部分群の測度論的剛性について

研究課題名（英文）　Measure-theoretic rigidity for lattices in semisimple Lie groups

研究代表者
木田　良才（KIDA YOSHIKATA）
東北大学・大学院理学研究科・助教
研究者番号：９０４５１５１７

研究成果の概要：各単純因子の実階数が２以上の半単純リー群の格子部分群による、測度空間上の作用に関する剛性を証明した。つまり、そのような格子部分群の自己MEカップリングからそれが属するリー群への同変写像を構成した。また、曲面の写像類群による作用からできる測度論的同値関係の外部自己同型群を調べ、特に、曲面上の単純閉曲線を用いて定義される一般化されたベルヌーイ作用に対し、その群を計算した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００７年度	1,350,000	0	1,350,000
２００８年度	1,350,000	405,000	1,755,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,700,000	405,000	3,105,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：離散群、測度同値、軌道同値

１．研究開始当初の背景

可算で離散な群のことを離散群と呼ぶ。本研究で扱う対象は、離散群による標準確率空間上のエルゴード的で本質的に自由な作用である。このような作用をe.f.m.p.作用と呼ぶことにする。離散群によるe.f.m.p.作用の間には共役と軌道同値と呼ばれる二つの同値関係が定義される。二つの離散群ΓとΛが、標準確率空間X、Y上にそれぞれe.f.m.p.で作用しているとする。その二つの作用が共役であるとは、測度空間としての同型 f:X-->Y と群同型F:Γ-->Λで、

$$f(\gamma x)=F(\gamma)f(x)$$

がΓの任意の元γとXのほとんど全ての点xについて成り立つようなものが存在するときをいう。また、二つの作用が軌道同値であるとは、測度空間としての同型 f:X-->Y で、

$$f(\Gamma x)=\Lambda f(x)$$

がXのほとんど全ての点xについて成り立つようなものが存在するときをいう。種々の離散群による e.f.m.p.作用を共役または軌道同値によって分類することは、エルゴード理論において基本的かつ重要な問題の一つである。軌道同値になるようなe.f.m.p.作用を持つ二つの離散群は測度同値であると呼ばれる。測度同値は、離散群の間の同値関係を定め、近年、測度同値によって離散群を分類

する研究が活発に行われている。中でも、次のような離散群は、測度同値の意味で剛的であることが知られている。

定理：G を非コンパクトで中心が自明な単純リー群で実階数が２以上のものとする。このとき、G の格子部分群と測度同値な離散群は、G のある格子部分群とほとんど同型である(Furman)。このような格子部分群を高階格子部分群と呼ぶことにする。

定理：二つ以上の非初等的双曲群の直積群による e.f.m.p. 作用で、各因子群がエルゴード的に作用するようなものは（ある緩やかな条件下で）超剛的である。つまり、そのような作用と軌道同値な e.f.m.p. 作用は、実は共役である（Monod-Shalom)。

定理：コンパクトで向き付け可能な非例外的曲面に対する写像類群と測度同値な離散群は、その写像類群とほとんど同型である。また、そのような写像類群の直積群に対しても同様な主張が成立する(Kida)。

二つ目の Monod-Shalom による例にあるように、ある種の直積群が様々な意味で剛性を持つことが知られており、三つ目の例にもあるように、この現象は写像類群の直積に関しても観察されている。そこで、一つ目の例にあるような単純リー群の格子部分群による直積群がまた剛性を持つかどうかという疑問が自然にわき上がってくる。写像類群の直積群が剛性を持つことの証明では、写像類群が、 Monod-Shalom が導入した離散群のクラス C に属するという性質が重要な役割を果たす。この性質により、直積群に関する剛性の問題が、それぞれの因子群に関する剛性の問題に帰着させることができるからである。ところが、高階格子部分群はクラス C に属さないことが Burger-Monod により示されている。よって、写像類群の場合と同じような道筋では、高階格子部分群の直積群の剛性を示すことはできない。しかしながら、Furman の定理の証明で用いられている、Zimmer のコサイクル超剛性定理は、高階格子部分群の非常に強い剛性を指し示すものであり、それらの直積群の剛性を証明する上でも有用な道具になると思われる。

以上が本研究開始当初の背景である。

２．研究の目的

(1)高階格子部分群の直積群が測度同値や軌道同値の意味で剛性を持つことを証明することが第一の目標である。簡単のため、二つの群による直積群しか考えないことにする。G、H を実階数が２以上の非コンパクトで中心が自明な単純リー群とする。このとき、G と H の格子部分群の直積は、G×H の格子部分群と測度同値であることがわかる。そこで、次のような主張を証明したい：G×H の格子部分群 Γ と測度同値な離散群は G×H のある格子部分群とほとんど同型である。

このことの証明の副産物として、そのような格子部分群 Γ を格子部分群として含むような局所コンパクト位相群 L を決定することができる。すなわち、L は G、H、Γ によるコンパクト群上の作用からできる半直積群とほとんど同型になる。

(2)Furman は高階格子部分群 Γ の測度同値に関する剛性を証明した後、Γ による e.f.m.p. 作用からできる（測度論的）同値関係の外部自己同型群を計算している。結果として、多くの場合、その計算は Γ の作用と同変になるようなもの全体からなる群を調べることに帰着することがわかる。これにより、具体的な Γ の e.f.m.p. 作用からできる同値関係の外部自己同型群を計算することができる。この計算においては、Γ の自己 ME カップリングから Γ を含むリー群への同変写像の存在が鍵となる。

一方で、以前行ってきた写像類群の作用に関する研究において、写像類群の自己 ME カップリングから写像類群への同変写像の存在を証明した。このことを用いて、写像類群による e.f.m.p. 作用からできる同値関係の外部自己同型群の計算は、その作用と同変なものからなる部分群の計算に帰着することを示したい。写像類群による具体的な作用としては、写像類群の幾何学的な部分群からできる、一般化されたベルヌーイ作用がある。この作用からできる同値関係の外部自己同型群を正確に求めたい。

３．研究の方法

(1)G、H を実階数が２以上の非コンパクトで中心が自明な単純リー群とする。Γ を G×H の格子部分群とする。Furman の表現定理により、Γ と測度同値になる離散群を調べるには、Γ の自己 ME カップリングを調べればよいことがわかる。Γ の自己 ME カップリングとは、Γ×Γ が保測に作用する測度空間で、Γ×{e} と {e}×Γ の各作用が本質的に自由で有限測度の基本領域を持つようなもののことをいう。

Γ の自己 ME カップリングが与えられたとき、Γ の二つの e.f.m.p. 作用からできる亜群の間の同型が得られる。一方、その作用から G×H の e.f.m.p. 作用が誘導され、それらからできる亜群の間の同型 f が得られる。この

同型 f がどのような性質を持つかを調べることが中心となる。具体的には、Zimmer のコサイクル超剛性定理を駆使することにより、G、H それぞれの作用からできる部分亜群が f により保存されることを示す。このことが証明されれば、G、H それぞれの作用からできる亜群の間の同型が得られることになるから、Zimmer のコサイクル超剛性定理を再び用いることにより、この亜群の同型が二つの作用の間の共役から来るものであることが証明される。

以上をまとめると、Γ の自己 ME カップリングから $G\times H$ への同変写像を構成することができ、このことから Γ の剛性を証明することができる。

(2) すでに述べたように、これまでの研究で、写像類群の自己 ME カップリングから写像類群への同変写像の存在が証明されている。これを用いて、写像類群による e.f.m.p. 作用からできる同値関係の外部自己同型群を計算する。より具体的には、そのような同値関係の自己同型 f が与えられれば、f に付随する写像類群の自己 ME カップリングを構成することができ、そこから写像類群への同変写像が f についての情報を持つことになる。これを用いて、f を同値関係の意味でのある内部自己同型で摂動させてやることにより、f は結局写像類群の作用に関して同変なものに変形させることができる。

ゆえに、写像類群の作用からできる同値関係の外部自己同型群の計算は、作用に関して同変になるようなもの全体の計算に帰着されることが証明される。

Γ を離散群、K を Γ が作用する可算離散空間、Y を標準確率空間とする。X を、K を添字集合とするような Y の直積空間 Y^K とすると、Γ は X 上に添字集合上の左掛け算として作用する。この X 上の作用は多くの場合、e.f.m.p. となることが知られており、一般化されたベルヌーイ作用と呼ばれる。Γ を写像類群とし、K を、曲面上のある単純閉曲線のアイソトピー類 a の Γ-軌道とする。このときの一般化されたベルヌーイ作用からできる同値関係の外部自己同型群を正確に計算する。前段落で述べたことにより、この計算は作用と同変な、同値関係の自己同型 f を調べればいいことになる。

$\Gamma(a)$ を Γ の元で a を固定するもの全体からなる部分群を表す。$\Gamma(a)$ の X 上の作用に対するエルゴード分解を求めることが重要なステップとなる。$\Gamma(a)$ による K 上の作用の $\{a\}$ 以外の軌道が無限個の元からなることが示されるから、これを用いると、X から a を添字とする Y への射影が、$\Gamma(a)$ による X 上の作用に対するエルゴード分解であることがわかる。f はこのエルゴード分解を保存しなければならないから、f は Y の確率空間としての自己同型を誘導することになる。以上をふまえると、上記のような、写像類群の一般化されたベルヌーイ作用からできる同値関係の外部自己同型群は Y の確率空間としての自己同型群と同型になることが示される。

４．研究成果

(1) G, H を実階数が 2 以上で、非コンパクトかつ中心が自明な単純リー群とする。Γ を $G\times H$ の格子部分群とする。すでに述べたように、Γ と測度同値な離散群を調べるためには、$G\times H$ による二つの e.f.m.p. 作用からできる亜群 M、N の間の同型 f を調べる必要がある。M、N の部分亜群として、$G\times H$ の部分群 $G\times\{e\}$、$\{e\}\times H$ の作用からできるものをそれぞれ $M(G)$、$M(H)$、$N(G)$、$N(H)$ と表すことにする。まず示されることは、f がこれらの部分亜群を保存するということである。例えば、f が $M(G)$ を $N(G)$ に、$M(H)$ を $N(H)$ に写すとする。これから、$M(G)$ から G へのコサイクルと $M(H)$ から H へのコサイクルが構成される。これらのコサイクルに Zimmer による超剛性定理を適用すると、これらのコサイクルが G や H の同型からくるものであることがわかる。以上により、特に次の主張が示されたことになる：

定理：$G\times H$ の二つの e.f.m.p. 作用が軌道同値ならば、それらは共役である。

またこの主張を用いると、Γ の自己 ME カップリングから $\mathrm{Aut}(G\times H)$ への同変写像を構成することができる。Furman による表現定理を適用すると、Γ と測度同値になる離散群 Λ に対し、Λ から $\mathrm{Aut}(G\times H)$ への表現を得ることができる。さらにこの表現の核は有限であることがわかる。ゆえに、今後はこの表現の像を調べる必要がある。

(2) Γ をコンパクトで向きづけ可能な、例外的でない曲面に対する写像類群とする。標準確率空間 X 上の Γ による e.f.m.p. 作用が与えられたとき、それからできる同値関係 R が、

$$R=\{(x, \gamma x)\in X\times X \mid x\in X,\ \gamma\in\Gamma\}$$

で定義される。$\mathrm{Out}(R)$ で R の同値関係としての外部自己同型群とする。R の自己同型 f で、Γ の自己同型 F が存在して、等式

$$f(\gamma x)=F(\gamma)f(x)$$

が任意の $\gamma\in\Gamma$ とほとんどすべての $x\in X$ について成り立つようなもので代表される $\mathrm{Out}(R)$ の元全体を $A(R)$ と表す。$A(R)$ は $\mathrm{Out}(R)$ の部分群である。このとき、次が示される：

定理：上の記号で、Out(R)=A(R)が成り立つ。

特に、Γの作用が 3.(2)で述べたような一般化されたベルヌーイ作用で与えられる場合、A(R)の計算は次のようにしてなされる：

定理：Y を 3.(2)での記号とし、Γの作用がそこで与えられているような一般化されたベルヌーイ作用とすると、A(R)は Aut(Y)と同型である。

よって、もし、Y を Aut(Y)が自明になるようなものとしてとると、それからできるΓの作用に対する Out(R)は自明になる。Out(R)が自明になるような R の構成は、長年研究されている対象であり、いくつか知られているが、本研究により新たな構成が与えられたことになる。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Yoshikata Kida, The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory, Memoirs of the American Mathematical Society, 196, 1-190 (2008) 査読有.

② Yoshikata Kida, Outer automorphism groups of equivalence relations for mapping class groups actions, Journal of the London Mathematical Society, 2nd Series, 78 , 622-638 (2008) 査読有.

③ Yoshikata Kida, Orbit equivalence rigidity for ergodic actions of mapping class groups, Geometrie Dedicata, 131, 99-109 (2008) 査読有.

〔学会発表〕（計６件）

① 木田 良才, Orbit equivalence rigidity for mapping class groups, 第５５回トポロジーシンポジウム, 2008 年８月９日, 金沢市文化ホール.

② Yoshikata Kida, Orbit equivalence rigidity for some groups acting on trees, The 1st MSJ-SI, Probabilistic Approach to Geomety, 2008 年８月４日, 京都大学.

③ Yoshikata Kida, Orbit equivalence rigidity for mapping class groups, JAMI conference, Geometric Group Theory, Geometric Analysis, and Mapping Class Groups, 2008 年５月５日, Jons Hopkins 大学（アメリカ).

④ 木田 良才, Orbit equivalence and measurable group theory,日本数学会幾何学分科会特別講演, 2008 年３月 23 日, 近畿大学.

⑤ 木田 良才, Measurable rigidity for mapping class groups, 第５４回幾何学シンポジウム, 2007 年８月 26 日, 鹿児島大学.

⑥ Yoshikata Kida, Orbit equivalence rigidity for ergodic actions of mapping class groups, Hyperbolic structures on 3-manifolds and large scale geometry of Teichmuller space, 2007 年 7 月 19 日, Warwick 大学（イギリス).

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計０件）

○取得状況（計０件）

〔その他〕

６．研究組織

(1)研究代表者

木田 良才（KIDA YOSHIKATA）

東北大学・大学院理学研究科・助教

研究者番号：９０４５１５１７

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし