様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 3 月 25 日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）
研究期間：2007 年度～2008 年度
課題番号：19840039
研究課題名（和文）　パンルヴェ型微分方程式と無限次元可積分系

研究課題名（英文）　Painleve equations and infinite integrable systems

研究代表者
津田　照久
九州大学・大学院数理学研究院・助教
研究者番号：00452730

研究成果の概要：

ワイル群の，良い幾何学的な背景を持つような新しい実現を構成した。これは高次元の有理代数多様体に擬正則写像として作用し，また可積分系において重要なタウ函数は高さ関数の類似として幾何的に定まる。ルート系がアフィン型の場合には，付随する力学系は既知の高階 q-パンルヴェ方程式を全て含むような一般的な枠組みを提供し，今後の研究に広い応用を持つものと期待される。また UC 階層と呼ばれる無限次元可積分系とモノドロミー保存変形(パンルヴェ方程式・ガルニエ系)との関係を，波動関数の満たす線形問題を経由することで，明らかにした。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2007 年度	1,220,000	0	1,220,000
2008 年度	1,140,000	342,000	1,482,000
年度			
年度			
年度			
総　計	2,360,000	342,000	2,702,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：パンルヴェ方程式，可積分系

１．研究開始当初の背景

古典的なパンルヴェ微分方程式の起源は，20 世紀初頭の P. パンルヴェ等による，動く特異点は高々極に限る，即ちパンルヴェ性を持つような２階代数的常微分方程式の分類という解析学的な問題に遡る。そこには微分方程式を使って新しい特殊関数，特に楕円関数

などの一般化を指向する時代背景があった。のちに，R. フックスやL. シュレジンガー等による線形常微分方程式のモノドロミー保存変形との関係や，最近ではソリトン系等の無限次元可積分系の簡約との対応など，解析学のみならず，表現論やモジュライ理論とパンルヴェ方程式の繋がりも次第に明らかになってきている。

実際，研究代表者が数年前に発表した UC 階層も，元々は全てのパンルヴェ微分方程式を KP 階層のような１成分のソリトン理論の枠組みで捉えることを一つの動機として，構成された無限次元可積分系であった。加えて，UC 階層が普遍指標(シューア関数のヤング図形の二つ組に付随する拡張)の特徴づける可積分系であることから，パンルヴェ方程式と一般線形群の表現論，あるいは対称多項式の理論，との関係に新しい視座が与えられた。

一方で，有理曲面あるいは有理代数多様体の上に作用するクレモナ変換群(双有理変換群)が q-差分類似などの離散版をも含んだパンルヴェ型方程式の時間発展の幾何学的な起源であることが分かっている。この立場から見ると，パンルヴェ型方程式の解に普遍指標が現れることは非常に不思議な現象と考えられる。この現象に対する純粋に幾何学的な理解が期待される。

２．研究の目的

パンルヴェ方程式(あるいはモノドロミー保存変形方程式)，及び，その背景にある無限次元可積分系を対象に，それらとヤング図形の組み合わせ論や表現論などとの関係についての基礎的な理論を構築する。

特に上記で述べたパンルヴェ型方程式と普遍指標との関係について，幾何学的な理解を得る事は，可積分系や特殊関数論，組み合わせ論や表現論を結びつける良い幾何学的理論への一つの道標を与えるものと期待される。

３．研究の方法

研究の進行には主なものとして，有理代数多様体の代数幾何学，無限次元リー環の表現論，離散力学系理論の手法を用いる。

４．研究成果

(1) UC 階層とは普遍指標をタウ函数として許すような無限次元可積分系であり，KP 階層の自然な拡張を与えている。当該研究期間において，懸案であった UC 階層に付随する線形補助問題(ラックス形式)の構成法を与えた。具体的な要点は，線形問題の従属変数である所謂，波動関数の選び方，及び，UC 階層から閉じた関数方程式を得る仕組みを確立したということにある。後者については，複素積分論の基本的な結果を用いるが，このような議論は従来の可積分系分野に見られないものであり，初等的ではあるが興味深い。

(2)さらに，UC 階層の線形補助問題が得られた一つの恩恵として，UC 階層とモノドロミー保存変形の関係がより明確なものとなった。特に，パンルヴェ第６方程式やガルニエ系を含んだシュレジンガー系の中のクラスについて，それらが UC 階層の相似簡約に由来するものであることを示した。例えば，パンルヴェ第６方程式の線形補助問題のうち最も標準的な，２階・確定特異点が４点であるものは UC 階層に自然に由来していることが分かる。当該，UC 階層とモノドロミー保存変形についての関係については，継続的に考察するべきものであり，今後のパンルヴェ方程式研究にとっても重要な課題と思われる。

(3) パンルヴェ方程式の一つの起源にある種の曲面上のアフィンワイル群の双有理表現がある。
以前に，研究代表者は，曲面とは限らない，高次元のある有理代数多様体に擬正則写像として作用するワイル群の双有理表現を構成した。この設定では，対応するルート系は曲面の場合と比べて，より一般なものを扱える上，特に対称なアフィン型の場合をすべて網羅していることが大きな特色である。
ルート系がアフィン型の場合，離散可積分系として興味ある対象である高階 q-パンルヴェ方程式が導かれるが，当該研究期間において，その力学系の次数増大度が高々２次であることを証明した。考えている有理代数多様体の(コ)ホモロジー群へのワイル群の作用を交差理論を用いて計算することが証明の主な部分である。また　q-差分ではなく加法的な離散パンルヴェ方程式に関連して，T 字型のディンキン図形を持つワイル群の双有理作用と(その高さに対応する)タウ関数を構成した.

(4)フィボナッチ数列の満たす４項間漸化式を２次元離散力学系(これをフィボナッチ力学系と呼ぶ)とみなして考察した。フィボナッチ力学系の相空間を射影平面の無限回ブロー・アップとして構成し，交点理論に基づいて，そのホモロジー群への線形作用を求めた。一つの応用として，力学系の次数増大度からふたたびフィボナッチ数列が現れる現象を証明した。これはフィボナッチ数の新しい定義を与えていると解釈することもできる。

(5)一般解が知られている関数で解かれるにも関わらずカオス的な振る舞いを示す力学系，所謂，可解カオス力学系についての研究を行った。具体的には楕円曲線，またはある有理楕円曲面(ヘッセ・ペンシル)，上のＮ倍角写像に由来するようなそれぞれ１次元，２次元の力学系を考察した。特に，この力学系が超離散類似を許す事，トロピカル幾何学的な記述を持つ事等を示した。一つの帰結として，テント写像と呼ばれる基本的なカオス力学系に対して，あるトロピカル楕円曲線の(ヤコビ多様体上での)倍角写像としての幾何的描像を与えた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）全て査読あり。

(1)T.Tsuda, Universal character and q-Painleve equations, Math.Ann. (2009), in press.

(2)<u>T.Tsuda</u> and T.Takenawa, Tropical representation of Weyl groups associated with certain rational varieties, Adv.Math. (2009), in press.

(3)K.Kajiwara, M.Kaneko, A. Nobe and <u>T.Tsuda</u>, Ultradiscretization of a solvable two-dimensional chaotic map associated with the Hesse cubic curve, Kyushu J. Math. (2009), in press.

(4)T.Tsuda, A geometric approach to tau-functions of difference Painleve equations, Lett.Math.Phys.85, 65-78 (2008)

(5)K.Kajiwara, A.Nobe and <u>T.Tsuda</u>, Ultradiscretization of solvable one-dimensional chaotic maps, J.Phys.A: Math.Theor.41, 395202(13pp) (2008)

(6)<u>T.Tsuda</u>, B.Grammaticos, A.Ramani and T.Takenawa, A class of integrable and nonintegrable mappings and their dynamics, Lett.Math.Phys.82, 39-49 (2007)

〔学会発表〕（計６件）

(1)津田照久，KP・UC 階層とパンルベ・ガルニエ系，超幾何方程式研究会，2009 年 1 月 6 日，神戸大学

(2)T.Tsuda, A geometric approach to tropical Weyl group actions and q-Painleve equations, Workshop "Geometry and Arithmetic arround Hypergeometric Functions",2008 年 10 月 1 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (Germany)

(3)津田照久，普遍指標と可積分系，パンルヴェ方程式，研究集会「可積分系数理の拡がり」，2008 年 8 月 12 日，京都大学数理解析研究所

(4)T.Tsuda, A geometric approach to tropical Weyl group actions and q-Painleve equations, International Conference "From Painleve to Okamoto", 2008年6月10日, The University of Tokyo (Japan)

(5)T.Tsuda, A geometric approach to tropical Weyl group actions and q-Painleve equations, The Banach Center Conference "Second Workshop on Nonlinearity and Geometry. Darboux Days" , 2008 年 4 月 18 日, Poznan (Poland)

(6)T.Tsuda, A geometric approach to tropical Weyl group actions and q-Painleve

equations,Workdhop on“Isolevel sets of the integrable systems 2007”, 2007 年 6 月 20 日, 慶応大学

６．研究組織

(1)研究代表者
津田　照久
九州大学・大学院数理学研究院・助教
研究者番号：00452730

(2)研究分担者
なし。

(3)連携研究者
なし。