

平成 21 年 4 月 1 日現在

研究種目：若手研究（スタートアップ）

研究期間：2007～2008

課題番号：19840041

研究課題名（和文） 多項式環の部分環と自己同型の研究

研究課題名（英文） Research on subrings and automorphisms of a polynomial ring

研究代表者

黒田 茂 (Kuroda Shigeru)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：70453032

研究成果の概要：多項式環に関して基本的な対象である部分環と自己同型を中心に研究し、部分環の有限生成性に関するヒルベルトの第 14 問題や、自己同型群の生成に関する Tame Generators Problem などにおいて、いくつかの新しい結果を得た。特に、自己同型群の研究では、最近、歴史的難問を解決した Shestakov と Umirbaev の理論を、部分環の解析のために我々が独自に培った技術を応用して再構築した。それにより、多項式環の自己同型群の構造に関して、より精密で詳細な結果が得られた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2007年度	1,280,000	0	1,280,000
2008年度	1,310,000	393,000	1,703,000
年度			
年度			
年度			
総計	2,590,000	393,000	2,983,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：アフィン代数幾何学、多項式環論

## 1. 研究開始当初の背景

多項式環は代数学において最も普遍的な対象の一つであり、多項式環に関係する様々な興味深い未解決問題が知られている。しかし、その捉えどころのなさから、多項式環の難しさを正面から乗り越えようとする試みは少数であり、目立った進展は得られていなかった。そうした中、2004年に Shestakov と Umirbaev は、3変数多項式環の自己同型群の構造に関する重要な理論を発表した。その理論の帰結として、有名な「永田予想」は解決し、Tame Generators Problem の解は否定的であることが判った。ここで、Tame Generators Problem とは、次のような問題である：

tors Problem とは、次のような問題である：

$k$  を体、 $k[\mathbf{x}] = k[x_1, \dots, x_n]$  を  $k$  上の  $n$  変数多項式環とすると、 $k[\mathbf{x}]$  の  $k$  上の自己同型全体のなす群  $\text{Aut}_k k[\mathbf{x}]$  は、「アフィン自己同型」・「基本自己同型」と呼ばれる簡単な形の 2 種類の自己同型だけで生成できるか？（これら 2 種類の自己同型をいくつか合成して得られる自己同型を、テイム自己同型と呼ぶ）。

しかし、この画期的な成果は、従来一般的な手法と趣を異にする手法によっていたことも影響し、専門家の間でさえ広く理解され

ていなかった。こうした状況において、Shestakov と Umirbaev の仕事を整理し、発展させることは、多項式環の研究を進展させるために非常に重要であった。また、それを迅速に行うことが、今後の多項式環研究の主導権を握る上で、一つの鍵になると考えられた。

一方、我々は従前の研究において、ヒルベルトの第 14 問題に対する反例を構成するために非常に有効な方法を確認していた。ヒルベルトの第 14 問題とは、多項式環  $k[x]$  の商体を  $k(\underline{x})$  とするとき、中間体  $k \subset L \subset k(\underline{x})$  に対し、 $k$  上の部分環  $L \cap k[x]$  が有限生成であるかどうかを問う問題である。我々はその構成法を実際に応用し、種々の条件の下で、それまで知られていなかった様々な反例を構成することに成功した。我々は Shestakov や Umirbaev と独立に研究を行ってきたが、図らずも我々の手法は Shestakov と Umirbaev による手法と多くの類似点を持っていた。それらの中で、我々の方が進んでいる点もあった。

## 2. 研究の目的

本研究の大きな目的は、従前の研究で我々が培った多項式環の部分環を解析するための技術と、Shestakov と Umirbaev による多項式環の自己同型を解析するための技術を統合し、さらに発展させることで、両者の長所を兼ね備えた理論を構築することである。上で述べたような経緯から、多項式環の深い性質を垣間見るために、Shestakov と Umirbaev の理論を我々が独自に用いてきた概念を通して読み解くことは有効である。

ところで、Shestakov と Umirbaev により 3 変数多項式環の自己同型のテーム性判定条件が一つ与えられたとはいえ、多項式環の自己同型群の構造には、依然として不明な部分が多く残されている。また、ヒルベルトの第 14 問題に関しても、我々の以前の研究で不十分な部分がある。特に、一定の条件の下で  $k$  上の部分環  $L \cap k[x]$  が有限生成であることを立証することは、代数幾何学等への応用の観点からも大きな意義がある。しかし、そのために有効な技術は未確立であり、取り組むべき重要な課題である。本研究では、我々の従前の研究と Shestakov と Umirbaev の研究の融合を行いながら、それを一つの手がかりとして、自己同型群のより詳細な構造の分析や、ヒルベルトの第 14 問題関連の問題にも取り組む。

## 3. 研究の方法

Tame Generators Problem や、ヒルベルトの第 14 問題の研究では、多項式環の自己同型と部分環の分析が主要なテーマになる。我々は従前の研究で、主に部分環を扱う技術を進化させてきたが、実は部分環の研究と自己同型の研究の間には密接な関係がある。そ

こで、まず初めに、我々が独自に培ってきた技術を有効に利用することで、多項式環の自己同型の研究の糸口をつかみ、それを足がかりに Shestakov と Umirbaev の理論の改良と一般化を進めた。

なお、多項式環の研究は、可換環論や代数幾何学、計算代数学等、様々な分野と結びついているので、多角的な視点から研究を行う必要がある。そのために、関係のある論文や書籍等の資料を入手し、分析と考察を行った。また、国内外の関連分野の研究者と連絡を取り、情報交換や議論を重ねた。それにより、最新の情報を収集したり、研究の新たな方向性を模索したりした。効率的に研究を進めるために、必要に応じて研究者を訪問したり、研究会を開いたりした。

得られた研究成果はシンポジウム等で発表し、専門家から広く意見を求めた。また、そのような場を積極的に活用し、情報交換や議論を重ねることで、研究のさらなる発展の可能性を探るとともに、結果の改良を進めた。一定の段階に達した研究成果は論文としてまとめ、専門家に送って意見を求めたり、インターネット上のプレプリント・アーカイブスに投稿したりした。そのようにして研究結果の完成度を高めた上で、論文を国際的な専門誌に投稿した。

## 4. 研究成果

Shestakov と Umirbaev の理論は、大きく分けて二つの部分から構成されている。一つは理論の基礎となる「道具」の部分であり、多項式の次数に関するある不等式を与えた結果である。そして、もう一つは理論の主要部分であり、標数が零の体上の 3 変数多項式環の自己同型のテーム性判定法を与えた結果である。この判定法の証明は、一つ目の結果を駆使しながら、大掛かりな数学的帰納法によって行われる。

これら二つの結果の証明は、どちらも非常に複雑で難解である。一つ目の結果について、Shestakov と Umirbaev はリー代数と結合代数の両方の構造を持つポアソン代数の概念を援用して理論を展開する。そして、多項式系への数段階からなるある操作の反復が終了することを決め手として、不等式を証明する。我々は研究の第一段階として、従前の研究で培った微分概念を基礎とする手法を用いることにより、この一つ目の結果を大幅に改良した。まず、そもそもポアソン代数を導入する必要のないことを突き止め、その代わりに「次数」の定義された「微分形式」の概念を考案した。そして、標準的な微分法を用いることで、Shestakov と Umirbaev の結果よりも精密で、なおかつより一般の結果を、極めて簡明に証明することに成功した。例えば、不等式によって評価される「次数」について、

Shestakov と Umirbaev の不等式では多項式の「全次数」が評価されるが、我々の不等式では、より一般に順序加群に値を持つ「重み付き次数」に関する評価が得られる。さらに、特別な場合として、「重み付き次数」が「全次数」と等しいときでも、我々の「一般化された Shestakov・Umirbaev 不等式」の方が、より精度の高い評価を与えている。

Shestakov と Umirbaev の不等式の元々の証明は複雑であり、それが彼らのタイム性判定の理論を難解にする一因であった。しかし、我々が不等式を簡明に証明したことでその障害が除かれ、彼らの理論はより理解し易くなった。こうした点においても、我々の成果は今後の自己同型の研究において重要な役割を果たすと期待できる。

ところで、Shestakov と Umirbaev の不等式から、「標数が零の体上の 2 変数多項式環の自己同型は、常にタイムである」という「Jung の定理」を導けることが知られている。同様の論法により、我々は「一般化された Shestakov・Umirbaev 不等式」から、「Jung の定理」のある種の一般化に相当する定理を導いた。この結果は、古典的な定理の一般化として興味深い。

これらの成果は、国内外で開催された色々な会議で報告し、関連分野の専門家から注目を浴びた。また、論文にまとめ、次項「主な発表論文等〔雑誌論文〕」の (2) として、査読付きの国際的な専門誌に発表した。

次に、我々は Shestakov と Umirbaev の理論の主要部分である、自己同型のタイム性判定の理論の精密化に取り組んだ。彼らの理論によれば、標数が零の体上の 3 変数多項式環の自己同型  $F$  がタイムならば、 $F$  は「基本簡約」または「I 型」、「II 型」、「III 型」、「IV 型」と呼ばれる 4 つの型の「簡約」のいずれかを許容する。

ところで、これら 4 つの型の「簡約」の概念は、理論上の要請により考案されたものであり、実際にそれを許容するタイム自己同型が存在するかどうかは明らかでない。このうち、「I 型簡約」を許容するタイム自己同型は、Shestakov と Umirbaev によって実際に具体例が構成され、存在することが分かっていた。より厳しい条件を満たす類似の例を、van den Essen たちは計算機を用いて与えた。一方、我々はヒルベルトの第 14 問題の反例を構成する際に編み出した、局所冪零微分を使う技法を応用して、可能な全ての条件の下で、「I 型簡約」を許容するタイム自己同型を構成することに成功した。この成果も、国内外の色々な会議で報告するとともに、次項「主な発表論文等〔雑誌論文〕」の (4) として発表した。

「基本簡約」や 4 つの型の「簡約」の概念は、多項式の「全次数」に着目して定義され

たものである。一方、上で述べたように、我々の「一般化された Shestakov・Umirbaev 不等式」は、「全次数」より一般的な「重み付き次数」に関する評価を、より高い精度で与えることができる。そこで、我々は「一般化された Shestakov・Umirbaev 不等式」を基礎にして、Shestakov と Umirbaev の理論の主要部分であるタイム性判定の理論を再構築した。

まず、重みとして順序加群の正の元の  $n$  項組  $\mathbf{w}$  を任意に固定し、 $\mathbf{w}$  に対して「基本簡約」の概念を定義した。さらに、重み  $\mathbf{w}$  に対し、「I 型」、「II 型」、「III 型」の簡約の概念を合併して少し狭めたものの一般化に相当する「Shestakov・Umirbaev 簡約」という概念を新たに定義した。そして、自己同型  $F$  がタイムならば、 $F$  は重み  $\mathbf{w}$  に関する「基本簡約」または「Shestakov・Umirbaev 簡約」を許容することを示した。

この結果から、Shestakov と Umirbaev の判定法は直ちに従う。また、特別な場合として、重み  $\mathbf{w}$  が「全次数」を定める場合でも、自己同型のタイム性を判定するために「IV 型簡約」を考慮する必要がないことも直ぐに分かる。実際、我々の結果の一つの帰結として、3 変数多項式環のどのようなタイム自己同型も「IV 型簡約」を許容しないことを直接証明した。それまで、「I 型」以外の 3 つの型の「簡約」については、それを許容するタイム自己同型が実際に存在するかどうか不明だったが、我々の結果により、「IV 型」については否定的に決着が着いた。また、我々の判定法の証明は、重み  $\mathbf{w}$  が特別な条件を満たす場合には、幾つかの議論を省略して簡略化できる。そのお陰で、例えば「永田の自己同型」がタイムでないことを、より簡単に示すことが可能である。

この成果についても、国内外の色々な会議で報告した。Shestakov と Umirbaev の理論を実質的に発展させた最初の結果として、多くの専門家が強い関心を示した。また、この成果をまとめた論文は、次項「主な発表論文等〔雑誌論文〕」の (5) として発表した。

Shestakov と Umirbaev の理論は、基礎体  $k$  の標数が零であるという仮定の下で構築されており、彼らによる自己同型のタイム性判定法は、 $k$  の標数が正の場合には使用できない。そこで、これを  $k$  の標数が正の場合に拡張するための基礎理論の整備に取り組んだ。一般に、 $k$  の標数が正の場合に  $k[\underline{x}]$  の自己同型を扱うのは非常に難しい。状況が単純な 2 変数の場合でも結果は少ないが、Jung の定理と同様に 2 変数の場合に任意の自己同型がタイムであることは、van der Kulk によって示されている。我々は、Makar-Limanov による van der Kulk の定理の別証明の方法に注目した。明示的には言及されていないが、Makar-Limanov の証明で鍵となる補題は、「イニシヤ

ル代数」の構造に関するものである。この補題は、一見すると非常に技巧的に見える。しかし、我々はイニシャル代数の構造に関する以下の簡明な結果から、Makar-Limanov の補題を自然に導けることを明らかにした。

中間体  $k \subset L \subset k(\mathbf{x})$  と  $L$  上超越的な有理式  $g \in k(\mathbf{x})$  に対し、 $k(\mathbf{x})$  の  $k$  上の部分環  $L[g]$  のイニシャル代数  $R$  を考える。このとき、 $k(\mathbf{x})$  の  $k$  上の部分環  $A$  と有理式  $h \in k(\mathbf{x})$  を巧く定義すると、「 $R$  は  $A$  の上に  $h$  で生成される」という定理を証明できる。この定理を、 $L$  が  $k$  の単純拡大の場合に適用すると、Makar-Limanov の補題が直ちに得られるのである。 $A$  や  $h$  を巧く定義したことが功を奏し、イニシャル代数  $R$  の構造を単純明快に記述できる。このようにして、2変数多項式環の自己同型群の構造は、基礎体  $k$  の標数が正であっても容易に捉えられることが分かった。この結果は、幾つかの国内外の会議で報告した。さらに、次項「主な発表論文等 [雑誌論文]」の (6) として、この成果をまとめた論文を公表する予定である。また、Shestakov と Umirbaev の理論を拡張するための手がかりを探るために、イニシャル代数の構造に関する上述の定理を、 $L$  が 2つの多項式で生成される中間体の場合に適用して、3変数多項式環の自己同型について調べた。

これとは異なる方向からのアプローチとして、Shestakov と Umirbaev の不等式そのものを標数が正の場合に拡張する研究にも取り組んだ。元々、この不等式は「微分」の概念と密接に結びついているものであり、標数が正の場合に拡張しようとする、実に多くの困難に直面する。それらを回避するために「高次微分」の概念を利用して、部分的な成果を得た。

Shestakov と Umirbaev による多項式環の自己同型のタイム性判定の理論を、4変数の場合に拡張するためには、多項式環を扱うためのより高度な技術が必要となる。それを確立するための手掛かりを得るために、かつて蔵野和彦が与えたヒルベルトの第14問題に対するある肯定解について、詳細な分析と考察を行った。1990年にP. Robertsは、6個の7変数有理式が生成する中間体  $k \subset L \subset k(\mathbf{x})$  として、ヒルベルトの第14問題の反例を構成した。蔵野は、この有理式の形を少し変えた場合に  $L \cap k[\mathbf{x}]$  が有限生成となることを、巧妙な帰納法によって証明した。この結果は、ヒルベルトの第14問題に対する数少ない実質的な肯定解の一つとして注目に値する。我々は蔵野の方法を一般化し、多項式環を扱うための効果的な手法として発展させることを試みた。その一つの成果として、ヒルベルトの第14問題とも関係の深い「Nowicki予想」の新しい証明を得た。この成果は、次項「主な発表論文等 [雑誌論文]」の (3) とし

て公表した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

### (1) Shigeru Kuroda

Hilbert's Fourteenth Problem and algebraic extensions with an appendix on Roberts type counterexamples, Acta Math. Vietnamica 32 (2007), 247-257. 査読有り.

### (2) Shigeru Kuroda

A generalization of the Shestakov-Umirbaev inequality, J. Math. Soc. Japan 60 (2008), 495-510. 査読有り.

### (3) Shigeru Kuroda

A simple proof of Nowicki's conjecture on the kernel of an elementary derivation, TMU Preprint Series 2008, No. 1. (計 6 ページ) 査読無し.

(Tokyo J. Math., to appear. 査読有り.)

### (4) Shigeru Kuroda

Automorphisms of a polynomial ring which admit reductions of type I, arXiv:math.AC/0708.2120. (計 11 ページ) 査読無し.

(Publ. Res. Inst. Math. Sci., to appear. 査読有り).

### (5) Shigeru Kuroda

Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, arXiv:math.AC/0801.0117. (計 52 ページ) 査読無し (査読付きの専門誌に投稿中).

### (6) Shigeru Kuroda

Initial algebras and polynomial automorphisms, Proceedings of the 4<sup>th</sup> Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, to appear. 査読無し.

[学会発表] (計 22 件)

### (1) Shigeru Kuroda

Initial algebras and polynomial automorphisms, The 4<sup>th</sup> Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2009年2月21日, 明治大学.

(2) Shigeru Kuroda

The Shestakov-Umirbaev inequality and polynomial automorphisms, Conference on Affine Algebraic Geometry, 2008年12月23日, Fireflies Intercultural Center, India.

(3) Shigeru Kuroda

Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, Fall Central Section Meeting of AMS, 2008年10月18日, Western Michigan University, USA.

(4) Shigeru Kuroda

Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, International Conference on Commutative Algebra, 2008年3月20日, 横浜開港記念会館.

(5) Shigeru Kuroda

The Shestakov-Umirbaev inequality and automorphisms of a polynomial ring, The 3<sup>rd</sup> Japan-Vietnam Joint Seminar on Commutative Algebra, 2007年12月5日, Institute of Mathematics, Vietnam.

(6) Shigeru Kuroda

How to construct counterexamples to Hilbert's 14th problem easily, BIRS Workshop 07w5505: Commutative Algebra and its Interaction with Algebraic Geometry, 2007年6月14日, Banff Center, Canada.

(7) 黒田 茂

Polynomial automorphisms and initial algebras, 日本数学会年会, 2009年3月29日, 東京大学.

(8) 黒田 茂

正標数の体上の多項式環のtame自己同型のある特徴, アフィン代数幾何学研究集会, 2009年3月16日, 関西学院大学.

(9) 黒田 茂

鏡映群とニュートン多面体, 研究会「多項式環とその周辺の諸問題」, 2009年2月14日, 兵庫県立大学.

(10) 黒田 茂

A simple proof of Nowicki's conjecture on the kernel of an elementary derivation, 第30回可換環論シンポジウム, 2008年11月18日, 国民宿舎虹ノ松原ホテル.

(11) 黒田 茂

多項式環の自己同型とイニシャル代数, アフィン代数幾何学シンポジウム, 2008年9月5日, 関西学院大学.

(12) 黒田 茂

多項式環の冒険, 代数・表現論セミナー, 2008年5月29日, 立命館大学.

(13) 黒田 茂

多項式環の自己同型に関する永田予想と Shestakov-Umirbaev簡約, 日本数学会年会, 2008年3月26日, 近畿大学.

(14) 黒田 茂

多項式環の自己同型に関する永田予想と Shestakov-Umirbaev簡約 (その1), (その2), (その3), 代数学研究会, 2008年3月12日, 関西学院大学.

(15) 黒田 茂

多項式環の自己同型に関する永田予想と Shestakov-Umirbaev簡約, 複素幾何セミナー, 2008年1月30日, 首都大学東京.

(16) 黒田 茂

多項式環の自己同型に関する永田予想と Shestakov-Umirbaev簡約, 代数幾何学セミナー, 2007年12月14日, 東北大学.

(17) 黒田 茂

Shestakov-Umirbaev reductions and Nagata's conjecture on a polynomial automorphism, 第29回可換環論シンポジウム, 2007年11月22日, 愛知厚生年金会館ウエルシティなごや.

(18) 黒田 茂

多項式環のI型簡約可能自己同型 日本数学会秋季総合分科会, 2007年9月23日, 東北大学.

(19) 黒田 茂

Automorphisms of polynomial rings which admit reductions of type I, 第52回代数学シンポジウム, 2007年8月9日, 神戸大学.

(20) 黒田 茂

多項式環の自己同型と不等式, 代数幾何学  
セミナー, 2007年7月13日, 東北大学.

(21) 黒田 茂

Automorphisms of the polynomial ring in  
three variables which admit reductions of  
type I, 日大特異点論セミナー,  
2007年5月21日, 日本大学.

(22) 黒田 茂

多項式環の冒険—ヒルベルトの第14問題、  
SAGBI基底、自己同型、  
数理情報科学専攻談話会・複素幾何セミナー  
(共催), 2007年5月9日, 首都大学東京.

## 6. 研究組織

(1) 研究代表者

黒田 茂 (Kuroda Shigeru)

首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号: 70453032

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし