

令和 6 年 5 月 13 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19H01779

研究課題名(和文) D-臨界的双有理幾何学の確立とDonaldson-Thomas不変量の圏論化

研究課題名(英文) D-critical birational geometry and categorification of Donaldson-Thomas invariants

研究代表者

戸田 幸伸 (Toda, Yukinobu)

東京大学・カブリ数物連携宇宙研究機構・教授

研究者番号：20503882

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,890,000円

研究成果の概要(和文)：3次元カラビヤウ多様体上の安定対象のモジュライ空間は、Joyceにより導入されたd-臨界構造を持つ。このd-臨界構造を持つスキームの間の仮想的な双有理変換であるd-臨界的フリップやフロップという概念を導入した。更に数え上げ幾何学で重要となる種々の安定性条件の壁超えに付随してこれら仮想的な双有理変換が生じることを示した。また局所代数曲面の場合にDonaldson-Thomas不変量を圏論化するDT圏の概念を導入し、d-臨界的フリップやフロップに応じてこれらDT圏の間の振舞いを記述するd-臨界的D/K予想を定式化した。更にDT圏の圏論的壁超えに関する種々の性質を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

3次元カラビヤウ多様体上の曲線や安定層を数え上げるDonaldson-Thomas不変量は数学・物理双方にとって重要な研究課題である。従来の研究によって安定性条件の壁超え公式を用いることでそれらの種々の公式が導かれることが知られていた。今回の研究でそれらの公式の背後にある双有理幾何的・表現論的理解を、Donaldson-Thomas不変量を圏論化する「DT圏」と双有理幾何学の仮想版である「D-臨界的双有理幾何学」を確立することで明らかにした。これらは新しい概念であり、今後の更なる発展も期待される。

研究成果の概要(英文)：The moduli spaces of stable objects on Calabi-Yau 3-folds admit d-critical structures introduced by Joyce. We introduced the notion of d-critical flips and flops between them, which are regarded as virtual birational maps. Moreover we proved that these virtual birational transformations appear as wall-crossing of stability conditions which are important in enumerative geometry. We also introduced the notion of DT categories for local surfaces which categorify Donaldson-Thomas invariants, and formulated d-critical D/K conjecture which describes the behavior under d-critical flips and flops. We also proved several properties on categorical wall-crossing of DT categories.

研究分野：代数幾何学

キーワード：Donaldson-Thomas不変量 接続層の導来圏 行列因子化 圏論的Donaldson-Thomas理論 D-臨界的双有理幾何学 準BPS圏 圏論的壁超え公式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

Donaldson-Thomas(DT)不変量とは 3 次元カラビヤウ多様体上の安定層を数え上げる不変量であり、1998 年に Thomas により導入された。2003 年に Maulik-Nekrasov-Okounkov-Pandharipande は階数が 1 の DT 不変量と曲線を数え上げる Gromov-Witten 不変量との間の関係 (DT/GW 対応) を予想し、以後 DT 不変量の研究は急速に進んできた。

一方、代数多様体上の接続層の導来圏とは接続層の有界複体を対象とする三角圏であり、1960 年代に Grothendieck や Verdier により導入された概念である。その元々の動機は Serre 双対性定理の一般化にあったが、現在ではミラー対称性、双有理幾何学、表現論など様々な数学分野における対称性を実現する数学的対象として研究が進められている。特にフリップやフロップといった双有理変換によって接続層の導来圏の間に充滿忠実な関手や圏同値が存在すると予想されている。この予想は Bondal-Orlov や川又雄二郎氏によって提唱され、D/K 同値予想と呼ばれている。D/K 同値予想は代数幾何学における導来圏の研究の大きな動機を与えてきた。

私は 2008 年頃から代数多様体上の接続層の導来圏の技術やアイデアを DT 不変量の研究に取り入れ、上述の DT/GW 対応に関わる DT 不変量の種々の性質の証明、予想の解決を与えてきた。特に導来圏の安定性条件に付随して半安定な導来圏の対象を数え上げる新たな不変量を構成し、それらの安定性条件の変化における変異、すなわち「壁超え公式」を調べることが鍵となることを明らかにした。

更に 2016 年に Maulik 氏と共同研究を行い、超弦理論でその存在が予想されていた Gopakumar-Vafa(GV)不変量の数学的定式化を与えた。この定式化において、DT 不変量を洗練化するコホモロジー的 DT 不変量の構成を用いることが重要であった。これは次数付きベクトル空間でそのオイラー数が DT 不変量を与えるものであり、Kontsevich-Soibelman や Joyce により導入された。3 次元カラビヤウ多様体上の安定層のモジュライ空間には Joyce による d-臨界構造が入り、d-臨界構造を用いて上述のモジュライ空間上に消滅サイクル層の貼り合わせが構成できることが鍵である。更に GV 不変量の壁超え不変性も証明した。この GV 不変量の壁超えの研究において、安定性条件の壁超えにおいて安定対象のモジュライ空間があたかも仮想的に双有理変換のように振舞うことが観察された。

以上の研究が基になり、上述の仮想的な双有理変換の概念を数学的に厳密な形で定式化する「D-臨界的双有理幾何学」を導入することが重要であると考えた。また双有理幾何と導来圏における D/K 予想の仮想版である「D-臨界的 D/K 予想」を、DT 不変量を圏論化する「圏論的 DT 理論」を導入することで実現できるのではないかと、という着想を得た。更に圏論的 DT 理論を用いて、これまでの研究で得られていた DT 不変量の壁超え公式の圏論版が得られるのではないかと考えた。

2. 研究の目的

仮想的な双有理変換の概念を定式化する「D-臨界的双有理幾何学」を導入し、基礎理論を確立する。更に DT 不変量を圏論化する「圏論的 DT 理論」を導入し、D-臨界版 D/K 予想の数学的定式化及び証明、DT 不変量の壁超え公式を圏論化する圏論的壁超え公式を導出することが研究の目的である。これらの研究の過程において、圏論的 Hall 代数を用いた数え上げ幾何学の公式の幾何表現論的理解、古典的なモジュライ空間の導来圏の新たな準直交分解の存在なども見込まれる。これら副産物も追及することで DT 理論と双有理幾何学・幾何的表現論・古典的モジュライ理論との間の密接な関係を見出すことも目的である。

3. 研究の方法

Joyce による d-臨界構造を持ったスキームに対して、d-臨界的フリップ及び d-臨界的フロップといった概念を導入し、数え上げ幾何学の研究において重要な役割を果たした壁越えに付随してこれら d-臨界的双有理変換が生じることを示していく。圏論的 DT 理論の導入については、代数曲面の標準束の全空間で与えられる局所曲面の場合に DT 不変量を圏論化する「DT 圏」を構成し、その性質を調べていく。この場合に d-臨界的フリップや d-臨界的フロップによって DT 圏の間の充滿忠実関手や圏同値が存在することを予想として提唱する。上述の予想にアプローチするため、DT 圏の窓定理や圏論的 Hall 代数といった技術を開発し、応用を図る。更にこれらの研究と幾何学的表現論・古典的モジュライ空間との関連について調べる。具体的には、圏論的 Pandharipande-Thomas 理論への圏論的 Hecke 作用の構成、曲線の対称積や Quot スキームの導来圏の準直交分解の構成について調べる。

4. 研究成果

目的としていた D-臨界的双有理幾何学を定式化した。また局所代数曲面の場合に DT 圏を導入し、その性質を調べた。上述の DT 圏に関する種々の予想を提出し、それらの解決に向けた技術の開発、様々な場合における予想の証明を与えた。詳細は以下の通りである。

(1) D-臨界的双有理幾何学の基礎理論の確立

一般に 3 次元カラビヤウ多様体上の安定性条件の壁越えが与えられると、安定対象のモジュライ空間にフリップやフロップと類似した図式が得られる。しかし 3 次元カラビヤウ多様体上の安定対象のモジュライ空間は被約とも既約とも限らず、通常双有理幾何学で扱う範疇を超えた特異点が生じる。更に、仮にモジュライ空間が滑らかだとしても、安定性条件の壁越えによってモジュライ空間は双有理同値になると限らない(例えば次元が変化する可能性もある)。これらモジュライ空間は Joyce による D-臨界構造を持つ。

そこで一般に D-臨界構造を持つスキームの図式に対して、D-臨界的フリップや D-臨界的フロップといった概念を定式化した。これらは実際の双有理変換ではないが、いわば「仮想的な双有理変換」と呼ぶべきものである。更に数え上げ幾何学で重要となる安定性条件の壁越えに付随する図式が、上述で定義した D-臨界的フリップや D-臨界的フロップとなることを明らかにした。例えば、1 次元安定層のモジュライ空間の壁越え図式は D-臨界的フロップを与え、また DT/PT 対応に付随する壁越え図式や Pandharipande-Thomas (PT) 安定対モジュライ空間の壁越えに付随する図式は D-臨界的フリップを与える。上述の壁越え図式は数え上げ幾何における種々の公式の導出において重要な役割を果たしていたが、これらの背後に仮想的な双有理幾何学が隠れていたことが判明し、数え上げ幾何学の種々の公式の双有理幾何学的解釈が可能となった。

(2) 局所代数曲面上の圏論的 DT 理論

一般に 3 次元カラビヤウ多様体上の安定対象のモジュライ空間には(-1)-捻りシンプレクティック構造を持つ導来スキームの構造が入る。D-臨界構造は、上述の(-1)-捻りシンプレクティック構造から定まる。(-1)-捻りシンプレクティックスキームは局所的には滑らかなスキーム上の関数の導来臨界点集合として記述でき、よって局所的に行列因子化のなす dg 圏が定まる。そこでこれら dg 圏を貼り合わせて、大域的な dg 圏を構成できないかという疑問が沸き上がる。このように大域的な dg 圏が構成できたなら、DT 不変量を圏論化する「DT 圏」と呼ぶべき圏を与えると考えられる。例えば DT 圏の周期的サイクリックホモロジーや位相的 K 理論のオイラー数を取ることによって DT 不変量が復元できると期待される。

この DT 圏を一般の 3 次元カラビヤウ多様体において構成することは現在でも困難な問題であるが、代数曲面の標準束の全空間として与えられる 3 次元カラビヤウ多様体(局所代数曲面)に対して DT 圏を構成し、その性質を調べた。この場合、局所代数曲面上の接続層のモジュライスタックは、元の曲面の接続層のモジュライスタックの(-1)-捻り余接束として与えられる。この余接束としての記述と Koszul 双対性定理、そして Arinkin-Gaiutsory による接続層の特異台の概念を用いることで局所代数曲面の場合の DT 圏を構成した。

更に、局所代数曲面の安定対象のモジュライ空間の壁越えに付随して D-臨界的フリップや D-臨界的フロップが生じる場合に DT 圏の間に充満忠実関手や圏同値が存在することを予想し、D-臨界版 D/K 予想を局所代数曲面の場合に定式化した。上述の D-臨界版 D/K 予想にアプローチするため、DT 圏の窓定理や圏論的 Hall 代数などを確立し、実際に様々な場合で D-臨界版 D/K 予想を証明した。例えば曲線類が被約の場合、PT 圏から DT 圏への充満忠実関手が存在することを示した。DT/PT 対応は D-臨界的フリップを与えるため、D-臨界版 D/K 予想の重要な根拠を与えたといえる。

以上の成果は 2019 年にプレプリントとして発表した後、2020 年に大幅に拡張して 170 ページ以上のプレプリントとして発表した。数年間の査読の後、2024 年に Springer Lecture Notes in Math からアクセプトされ、monograph として出版予定である。

(3) 圏論的壁越え公式

局所代数曲面上で定義した DT 圏を用いて、数え上げ幾何学における重要な例で圏論的壁越え公式を定式化し、証明した。最初に扱った例は resolved conifold の小特異点解消である。この場合に PT 圏の圏論的壁越え公式を証明し、長尾-中島による数値的な PT 不変量の壁越え公式の圏論化を与えた。Resolved conifold の場合、安定性条件のパラメータが存在して、安定性の壁を超えるたびに PT 不変量の生成関数が因数分解できることが知られていた。この研究により、PT 圏の壁越えによって上述の因数分解を圏化する PT 圏の準直行分解を得た。

更に、3 次元アフィン空間上の点のヒルベルトスキームに付随する圏論的 DT 理論の研究を Tudor Padurariu 氏と共同で行い、この場合の圏論的壁越え公式を得た。3 次元の点のヒルベルトスキームに付随する通常の DT 不変量の生成関数は 3 次元ヤング図形を数え上げる MacMahon 関数で記述できることが知られていたが、この MacMahon 関数を圏論化する DT 圏の準直交分解を得た。この場合、準直交成分は BPS 不変量を荒い意味で圏論化する「準 BPS 圏」の圏論的 Hall 積から成り立っている。上述の研究の手法を更に深化、発展させることで、局所代数曲面上の被約曲線類に対する圏論的 DT/PT 対応を Padurariu との共同研究で証明した。

(4) 圏論的 Hall 代数の作用

一般に Hall 代数とはある種のアーベル圏から定まる代数構造で、表現論などで重要な役割を果たす。(1) の研究で定義した局所代数曲面上の DT 圏に、Hall 代数の圏論版とも言える圏論

的 Hall 代数の構造が入ることを示した。通常の代数曲面の場合には Porta-Sala によって Kapranov-Vasserot のコホモロジー的 Hall 代数を圏化する圏論的 Hall 代数の構造が入ることが示されていた。局所代数曲面の場合は、Porta-Sala の圏論的 Hall 代数の構造が Arinkin-Gaiatsgory の特異台の概念と整合することを証明することで圏論的 Hall 代数の構造が入ることを示した。更にこの圏論的 Hall 代数を用いて、局所代数曲面上の PT 圏に Weyl 代数の圏論化作用が入ることを示した。この結果は曲線の数え上げ幾何学と幾何的表現論の関係を圏のレベルで実現したものと言える。

(5) 準 BPS 圏の研究

Padurariu との共同研究で BPS 不変量を圏論化する「準 BPS 圏」を種々の状況で定義した。この種々の状況とは、ポテンシャル付き対称的簾、局所 K3 曲面の場合などが当てはまる。これらは圏論的壁超え公式を記述する上で必要となるが、準 BPS 圏それ自体興味深い研究対象であることも判明した。3次元アフィン空間の場合、準 BPS 圏が対称群の群作用による商スタックの導来圏と同値になると予想し、実際にこの予想をトラス同変 K 群と位相的 K 群のレベルで成立することを示した。この結果は3次元の場合の点のヒルベルトスキームに対する McKay 対応の類似と解釈できる。

局所 K3 曲面の場合、準 BPS 圏が半安定対象のモジュライスタックの接続層の導来圏の「基底」を与えることが分かった。具体的には、上述の導来圏に準直交分解が存在し、各成分が準 BPS 圏の圏論的 Hall 積で与えられることを示した。更に向井ベクトルと重みが互いに素である場合、BPS 圏が固有かつ滑らかな dg 圏であること、Serre 関手が良モジュライ空間上エタール局所的に自明であること、壁越えによる圏同値を与えること、そして BPS 圏の位相的 K 群のオイラー数が BPS 不変量を与えることを証明した。従って、局所 K3 曲面の BPS 圏が期待される「良い性質を持つ」dg 圏であることが明らかになった。更に、BPS 圏は特異点を持った複素シンプレクティック多様体の捻り圏論的クレパント特異点解消を与える と解釈できる。この場合には通常の意味のクレパント特異点解消が(O'Grady による唯一の例外を除いて)存在しないため、BPS 圏による複素シンプレクティック多様体論の新たな側面が発見されたことになった。

(6) 古典的モジュライ空間上の接続層の導来圏

本研究で開発した DT 圏や窓定理、圏論的 Hall 代数の技術を用いて、古典的なモジュライ空間の接続層の導来圏の新たな準直交分解を見出し、証明した。例えば、Qingyuan Jiang によって提唱されていたある種の相対 Quot スキームの接続層の導来圏の準直交分解を示した。この準直交分解は Brill-Noether 軌跡の特異点解消の導来圏や曲面上の点の Hilbert スキームの接続層の導来圏の研究に応用される。また、曲線の対称積の接続層の導来圏の準直交分解、K3 曲面上の線形系に付随する相対ヒルベルトスキームの接続層の導来圏の準直交分解なども証明した。このように、3次元カラビヤウ多様体の圏論的 DT 理論の研究が代数幾何における古典的なモジュライ空間の接続層の導来圏の研究に応用されることが明らかとなった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計19件（うち査読付論文 19件 / うち国際共著 6件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 396
2. 論文標題 Tautological stable pair invariants of Calabi-Yau 4-folds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.108176	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Georg Oberdieck and Dulip Piyaratne and Yukinobu Toda	4. 巻 31
2. 論文標題 Donaldson-Thomas invariants of abelian threefolds and Bridgeland stability conditions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 13-73
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/jag/788	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yalong Cao and Daves Maulik and Yukinobu Toda	4. 巻 24
2. 論文標題 Stable pairs and Gopakumar-Vafa type invariants for Calabi-Yau 4-folds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 J. Eur. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 527-581
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JEMS/1110	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yalong Cao and Yukinobu Toda	4. 巻 406
2. 論文標題 Curve counting via stable objects in derived categories of Calabi-Yau 4-folds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-58
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2022.108531	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yalong Cao and Georg Oberdieck and Yukinobu Toda	4. 巻 408
2. 論文標題 Stable pairs and Gopakumar-Vafa type invariants on holomorphic symplectic 4-folds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2022.108605	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 9
2. 論文標題 Birational geometry for d-critical loci and wall-crossing in Calabi- Yau 3-folds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 513-573
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14231/AG-2022-016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yalong Cao and Yukinobu Toda	4. 巻 383
2. 論文標題 Gopakumar-Vafa type invariants on Calabi-Yau 4-folds via descendent insertions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Comm. Math. Phys.	6. 最初と最後の頁 281-310
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-020-03897-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 23
2. 論文標題 Semiorthogonal decompositions of stable pair moduli spaces via d-critical flips	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Eur. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 1675-1725
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/JEMS/1041	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Koseki and Yukinobu Toda	4. 巻 391
2. 論文標題 Derived categories of Thaddeus pair moduli spaces via d-critical flips	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-55
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107965	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 7
2. 論文標題 Hall algebras in the derived category and higher rank DT invariants	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 240-262
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14231/AG-2020-008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 26
2. 論文標題 Hall-type algebras for categorical Donaldson-Thomas theories on local surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Selecta Math	6. 最初と最後の頁 1-72
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00029-020-00592-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Dulip Piyaratne and Yukinobu Toda	4. 巻 747
2. 論文標題 Moduli of Bridgeland semistable objects on 3-folds and Donaldson-Thomas invariants	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Reine. Angew. Math.	6. 最初と最後の頁 175-219
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/crelle-2016-0006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 7
2. 論文標題 Hall algebras in the derived category and higher-rank DT invariants	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 240-262
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14231/AG-2020-008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yalong Cao and Georg Oberdieck Georg and Yukinobu Toda	4. 巻 405
2. 論文標題 Gopakumar-Vafa Type Invariants of Holomorphic Symplectic 4-Folds	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1-79
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00220-023-04882-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Tudor Padurariu and Yukinobu Toda	4. 巻 11
2. 論文標題 Categorical and K-theoretic Donaldson-Thomas theory of (part II)	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 1-47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2023.103	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 30
2. 論文標題 Derived categories of Quot schemes of locally free quotients via categorified Hall products	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Math. Res. Lett.	6. 最初と最後の頁 239-265
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 123
2. 論文標題 Gopakumar-Vafa invariants and wall-crossing	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Differential Geometry	6. 最初と最後の頁 141-193
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/jdg/1679503806	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yalong Cao and Yukinobu Toda	4. 巻 385
2. 論文標題 Counting perverse coherent systems on Calabi-Yau 4-folds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1-51
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-022-02364-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 巻 2023
2. 論文標題 Categorical Donaldson-Thomas Theory for Local Surfaces: $\mathbb{Z}/2$ -Periodic Version	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 11172-11216
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnac142	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計35件 (うち招待講演 35件 / うち国際学会 31件)

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Quasi-BPS categories for K3 surfaces
3. 学会等名 Tsinghua-Tokyo Workshop on Calabi-Yau (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Quasi-BPS categories for K3 surfaces
3. 学会等名 Enumerative Geometry in East Asia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 McKay correspondence for $\text{Hilb}^n(\mathbb{C}^3)$, categorical DT theory and geometric Langlands
3. 学会等名 McKay correspondence, Tilting theory and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Quasi-BPS categories
3. 学会等名 Joint mini-course with Tudor Padurariu at Hausdorff research institute for mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Quasi-BPS categories
3. 学会等名 iTHEMS Math seminar (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Quasi-BPS categories for K3 surfaces
3. 学会等名 Geometry of HyperKahler varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Quasi-BPS categories for K3 surfaces
3. 学会等名 Derived Categories, Moduli Spaces, and Counting Invariants (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Quasi-BPS categories for K3 surfaces
3. 学会等名 Current trends in categorical approach to algebraic and symplectic geometry 2 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Quasi-BPS categories for K3 surfaces
3. 学会等名 Higher structures in enumerative geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Seniorthogonal decompositions of Quot schemes and applications
3. 学会等名 Columbia Algebraic Geometry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical DT/PT correspondence for local surfaces
3. 学会等名 Categorical methods in moduli theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical wall-crossing formula of Donaldson-Thomas theory and applications
3. 学会等名 Deformations and higher structures (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical MacMahon formula
3. 学会等名 Algebraic Geometry: Moduli Spaces, Birational Geometry and Derived Aspects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical and K-theoretic Donaldson-Thomas theory of C^3
3. 学会等名 Derived Categories, Moduli Spaces, and Hyperkahler Varieties (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical and K-theoretic Donaldson-Thomas theory of C^3
3. 学会等名 A Tribute to the Life and Work of Professor Bumsig Kim: Categorical and Enumerative Aspects of Mirror Symmetry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 The local categorical DT/PT correspondence
3. 学会等名 4th PRIMA conference: Enumerative Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Semiorthogonal decompositions of classical moduli spaces
3. 学会等名 4th PRIMA conference: Moduli Spaces in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Donaldson-Thomas theory and wall-crossing
3. 学会等名 2023 NCTS Higher Dimensional Algebraic Geometry Mini-courses and Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical Donaldson-Thomas theory for quivers with super-potentials
3. 学会等名 2023 NCTS Higher Dimensional Algebraic Geometry Mini-courses and Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical Donaldson-Thomas theory for local surfaces
3. 学会等名 2023 NCTS Higher Dimensional Algebraic Geometry Mini-courses and Workshop (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorified Hall products in Donaldson-Thomas theory and wall-crossing
3. 学会等名 Categorical braid group actions and categorical representation theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Donaldson-Thomas invariants, wall-crossing and categorifications
3. 学会等名 iTHEMS Math seminar (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical wall-crossing formula for Donaldson-Thomas theory on the resolved conifold
3. 学会等名 城崎代数幾何学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorical wall-crossing formula in Donaldson-Thomas theory
3. 学会等名 Rikkyo-Math 2022 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On d-critical birational geometry and categorical DT theories
3. 学会等名 AGEA seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On d-critical birational geometry and categorical Donaldson-Thomas theories
3. 学会等名 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On d-critical birational geometry and categorical DT theories
3. 学会等名 Stony brook algebraic geometry seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On d-critical birational geometry and categorical DT theories
3. 学会等名 Cornell University algebraic geometry seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On d-critical birational geometry and categorical DT theories
3. 学会等名 Lagoon seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Categorified Hall products for local surfaces and wall-crossing
3. 学会等名 Categories and birational geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 Gopakumar-Vafa invariants via vanishing cycles
3. 学会等名 Winter school Perverse Sheaves in Enumerative Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On moduli spaces of stable objects on Calabi-Yau 3-folds
3. 学会等名 Lecture series in Algebraic Geometry 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On categorical Donaldson-Thomas theory for local surfaces
3. 学会等名 "Workshop on Derived Categories, Moduli Spaces and Deformation Theory " (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On categorical Donaldson-Thomas theory for local surfaces
3. 学会等名 Homological mirror symmetry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yukinobu Toda
2. 発表標題 On categorical Donaldson-Thomas theory for local surfaces
3. 学会等名 Gauge theory and virtual invariants (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 Yukinobu Toda	4. 発行年 2021年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 112
3. 書名 Recent progress on the Donaldson-Thomas theory: wall-crossing and refined invariants	

1. 著者名 上原北斗 戸田幸伸	4. 発行年 2020年
2. 出版社 丸善出版	5. 総ページ数 496
3. 書名 連接層の導来圏と代数幾何学	

〔産業財産権〕

〔その他〕

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	コロンビア大学			
スウェーデン	KTH Royal Institute of Technology			