

令和 6 年 4 月 12 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19H01780

研究課題名（和文）エタール層の特性サイクルと分岐

研究課題名（英文）characteristic cycles and ramification of etale sheaves

研究代表者

齋藤 毅 (Saito, Takeshi)

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70201506

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 13,000,000円

研究成果の概要（和文）：まず、局所体の分岐群については、その次数商がアーベル群であり p 倍で消えることを証明した。その指標群からある種の微分形式の群への単射を構成した。さらにこの後者の群の構成を大域化し、混標数の正則スキームの標数 p のファイバー上に、Frobenius--Witt余接束を構成した。このベクトル束上に、エタール層の特異台を定義した。またスキームの正則性の判定法も与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

局所体の分岐の古典理論においては、剰余体が完全という仮定が必要であったが、高次元の多様体やスキームの分岐を調べるには、この仮定を取り除くことが必要である。分岐群の次数商の構造を解明することで、局所体の分岐理論の一般化の基礎的な部分が完成した。この研究において、Frobenius--Witt微分形式の定義を発見した。これによって、正標数の多様体上のエタール層の特異台や特性サイクルの理論を、より整数論的な対象である混標数のスキーム上に拡張する道が開けた。

研究成果の概要（英文）：First, on the ramification groups of local fields, I proved that the graded quotients are abelian and annihilated by p . I also constructed injections from the character groups of the graded quotients to the group of certain differential forms. Further, globalizing the construction of the latter groups, I constructed the Frobenius-Witt cotangent bundle on the characteristic p fiber of a regular scheme of mixed characteristic. On this vector bundle, I defined the singular support of an etale sheaf. I also gave a regularity criterion of schemes.

研究分野：数論幾何

キーワード：局所体 分岐群 Frobenius--Witt微分形式 特異台

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

局所体の分岐群については、その次数商の構造が懸案となっていた。log 付きの場合や等標数の場合には、次数商が p 倍で消えるアーベル群であることが示され、その指標群から微分形式の群への特性形式の射が構成されていたので、混標数で log なしの場合が残されていた。特異台と特性サイクルについては、正標数の代数多様体上の層については構成されていたが、混標数の場合には、次元と同じ階数をもつ余接束が存在しないことが大きな障害となり、どのように理論を構成すればよいのかがわかっていない状態であった。

2. 研究の目的

等標数の場合や log 付きの場合と同様に、混標数の局所体の分岐群の次数商が p 倍で消えるアーベル群であることが示し、その指標群から微分形式の群への特性形式の射を構成する。混標数の正則スキームに対し、次元と同じ階数をもつ余接束の類似を構成する。さらにスキーム上のエタール層に対し、正標数の代数多様体の場合と同様に、特異台や特性サイクルをこの余接束の類似上に構成し、その次元や関手性などを証明する。正標数の場合のような非輪状性を使った定義は不可能なので、その代わりに横断性を用いて特異台を定義する。

3. 研究の方法

純粋数学の理論的研究であるので、従来の研究成果を踏まえて、十分な時間をかけて試行錯誤をしながら考察する。その際、直接関連する研究だけでなく、離れた分野での方法から示唆を得ることも有効である。また、国内外で開かれる研究集会に参加したり、海外から研究者を招いたりして、新しい研究成果を学び、議論をする中で着想を得ることも重要である。

4. 研究成果

2019 年度は局所体の分岐群について研究した。混標数の局所体の分岐群について大きな進展が得られた。1. 分岐群の次数商は剰余標数で零化されること、2. その指標群と接空間との関係、3. 古典的な場合との比較による特徴づけ、の 3 つである。

1. については 2 通りの証明を与えた。1 つは剰余体が完全体という古典的な場合への帰着である。ここでは、余接複体を用いたスキームの接空間の新しい構成が鍵となる。もう 1 つは幾何的な場合の類似による証明である。分岐群の指数が整数の場合にできることはわかっていたので、その場合への帰着が問題であったが、これが実現できるという発見が突破口となった。2 つめの方法により、分岐群の次数商の指標群から 1 つめの方法でも用いた接空間をひねったものへの標準単射が得られる。これは以前加藤和也氏がアーベル拡大の場合に構成していた精 Swan 導手の類似を全く一般の場合へ拡張するものであり、今後の大きな応用が期待されるものである。3. では、剰余体が完全という古典的な場合と、分岐群の関手性を用いることで、分岐群の特徴づけを与えた。この応用として、加藤和也氏による 正標数の局所体の Abel 拡大の場合の定義を松田茂樹氏が修正したものと、私が Abbes 氏と定義したものと一致の Witt ベクトルを用いない新証明が得られた。この成果は、以前に加藤和也氏と共同研究で行った、加藤氏が局所体の Abel 拡大について定義していた分岐群と、私が Abbes 氏と定義した分岐群が一致することの証明の方法が道を開いたものである。上記の結果についての論文は Journal of American Journal とインダの Tata 研究所で行われた研究集会の報告集から出版されている。

2020 年度には、混標数の離散付値環上の正則スキームに対し、その余接束のフロベニウス引き戻しに相当するものを、閉ファイバー上に構成した。さらにこれを用いて、スキーム上の構成可能層のマイクロ台、特異台の概念を定義した。離散付値環のスペクトルの閉点の余接空間のフロベニウス引き戻しに相当するものを、余接複体のホモロジー群として構成し、これが Gabber-Ramero が構成していたものと一致することを示した。この証明を分析することでこの構成が一般化できることがわかり、Frobenius--Witt 微分概念に到達した。Frobenius--Witt 微分は、通常の微分の加法性を p 乗の 2 項展開に現れる式で修正し、さらにライプニッツ則も p 乗を使って修正するものである。また、Frobenius--Witt 微分加群は Dupuy らが構成していた加群とほぼ同じものであることもわかった。適切な有限性の条件のもとで、Frobenius--Witt 微分による、局所環の正則性の判定条件を得た。この加群を使って、混標数の離散付値環上の正則スキームに対し、その余接束のフロベニウス引き戻しに相当するものを、閉ファイバー上に構成した。さらにこの余接束と、構成可能層 F に対する F 横断性の概念を使って、 F が余接束の閉錐部分集合 C 上にマイクロ台をもつという条件を定義した。マイクロ台となりうる最小の閉錐部分集合として特異台が定義されるが、特異台の存在の証明は今後の課題である。特異台が存在するような構成可能層の例を構成し、その場合に特異台を計算した。上記の結果についての論文 2 篇は Algebra and Number Theory から出版されている。

2021 年度までの研究で、剰余体が一般の離散付値体の分岐群の理論の基礎がひととおり完成したので、これをまとめた本を執筆した。本の内容は、下つき分岐群や加藤が構成したコホモロジー的分岐群を定義する第 1 部、巡回拡大に対してこれらと比較する Hasse--Arf の定理を証明す

る第 2 部、ガロワ表現の導手を扱う第 3 部、分岐群の幾何的な応用を扱う第 4 部、上つき分岐群を構成する第 5 部、上つき分岐群の次数商を調べる第 6 部からなる。分岐群の理論はこの 20 年で大きく発展したが、その内容を知るには原論文を読むしか方法がなかったのが、本としてまとめることはその全貌を把握するために大きな意味のあるものである。第 4 部では、Grothendieck--Ogg--Shafarevich 公式などの古典的な内容の他に、離散付値環上の曲線上のエタール層の隣接輪体の次元に関する Deligne--Kato 公式の新証明を与えた。従来の証明では、曲線をコンパクト化して安定還元定理を適用したが、ここでの証明では、blow-up をとるだけで、コンパクト化は不要である。この方法は、高次元への拡張も期待できる。300 ページを超える完成原稿を出版社に送った。

2023 年度には、局所体の分岐群についての古典的な定理である Hasse--Arf の定理について研究した。これはアーベル拡大に対し、上つき分岐群のジャンプは整数であるというものである。この定理は、剰余体の拡大が分離拡大の場合に成り立つが、1980 年台に加藤和也氏は、剰余体の拡大が非分離な場合にも、これが 1 つの元で生成され、さらに分岐指数が 1 の場合にも成り立つことを示していた。今年度の研究で、定理が成り立つための必要十分条件を与え、対数単生的とよぶことにした。これは整数環が対数スキームとして、対数的にスムーズかつ相対次元が 1 のスキームに exact に埋め込めるという条件である。Hasse--Arf の定理は分岐の古典理論における中心的な定理であるが、この結果により、その成立する理由が明らかになった。証明は、微分形式の加群の跡写像を用いた、拡大次数に関する帰納法によるものである。整数環の拡大は完全交叉なので、有限射に対する Grothendieck 双対性の方法を用いて跡写像が定義されるが、この方法に対数つきの場合に拡張して跡写像を構成した。この定理は上記の本を書いている中で発見したもので、詳細もその本の中に書いた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Saito Takeshi	4. 巻 145
2. 論文標題 Graded quotients of ramification groups of local fields with imperfect residue fields	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1389 ~ 1464
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1353/ajm.2023.a907702	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Saito	4. 巻 N/A
2. 論文標題 A characterization of ramification groups of local fields with imperfect residue fields	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 proceedings of International conference on arithmetic geometry 2020, TIFR.	6. 最初と最後の頁 421-433
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Saito	4. 巻 16-2
2. 論文標題 Cotangent bundles and micro-supports in mixed characteristic case	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 335--368
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/ant.2022.16.335	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Takeshi Saito	4. 巻 16-2
2. 論文標題 Frobenius-Witt differentials and regularity	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebra & Number Theory	6. 最初と最後の頁 369--391
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/ant.2022.16.369	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 KATO KAZUYA, LEAL ISABEL, SAITO TAKESHI	4. 巻 236
2. 論文標題 REFINED SWAN CONDUCTORS OF ONE-DIMENSIONAL GALOIS REPRESENTATIONS	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 1~49
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2019.13	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 KATO KAZUYA, SAITO TAKESHI	4. 巻 3
2. 論文標題 Coincidence of two Swan conductors of abelian characters	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Epijournal de Geometrie Algebrique	6. 最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計8件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 7件)

1. 発表者名 Takeshi Saito
2. 発表標題 On the Hasse-Arf theorem
3. 学会等名 Arithmetic and Cohomology of Algebraic Varieties (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 斎藤 毅
2. 発表標題 On the Hasse-Arf theorem
3. 学会等名 第19回北陸数論研究集会 「超幾何関数の数論とその周辺」
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takeshi Saito
2. 発表標題 Upper ramification groups of local fields with imperfect residue fields
3. 学会等名 Franco-Asian Summer School on Arithmetic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takeshi Saito
2. 発表標題 Micro support of a constructible sheaf in mixed characteristic
3. 学会等名 Conference en honneur de Luc Illusie (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takeshi Saito
2. 発表標題 Wild ramification and the cotangent bundle in mixed characteristic
3. 学会等名 Eighth Pacific Rim Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takeshi Saito
2. 発表標題 Graded Quotients of Ramification Groups of a Local Field with Imperfect Residue Field,
3. 学会等名 International conference on arithmetic geometry 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takeshi Saito
2. 発表標題 Characteristic cycle of a constructible sheaf
3. 学会等名 Arithmetic Geometry in Carthage (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takeshi Saito
2. 発表標題 CC
3. 学会等名 Wild Ramification and Irregular Singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Arithmetic Geometry in Carthage	開催年 2019年～2019年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関