

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19H01785

研究課題名(和文) グラフ複体と種々のモジュライ空間のコホモロジー環の構造の解明

研究課題名(英文) Study on structures of graph complexes and the cohomology rings of various moduli spaces

研究代表者

逆井 卓也 (Sakasai, Takuya)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：60451902

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 11,900,000円

研究成果の概要(和文)：リーマン面やグラフのモジュライ空間のコホモロジー群の構造について、それと密接に関連した群の構造を調べ、次の結果を得た：

(1) 第6 Johnson 準同型の余核に現れていた新たな種の成分について、榎本-佐藤障害とガロア障害の関係を調べ、その独立性を示した。(2) Johnson 像の決定問題について、次数8の構造を明らかにした。(3) 藤井道彦氏との共同研究により、Seifert ファイバー空間の基本群の自然な生成系に関する増大関数の具体的計算を行った。(4) 曲面の三角形分割の空間から作られる Kim-Manturov の群について、田所勇樹氏、田中心氏と共同で、群構造を詳細に調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

リーマン面やグラフのモジュライ空間のコホモロジーは様々な数学の分野と結びついた重要な研究対象であり、これまでに多くの研究がなされてきた。これらを調べるのにあたって、グラフ複体やそのホモロジーの構造を調べることや、関連するモジュラー群の構造を調べることは大変有用であることが認識されており、直接的な位相幾何的应用にとどまらず、代数や数理物理など広範囲にわたる応用が期待される。本研究では、Johnson準同型と呼ばれる対象を研究の中心に据え、その構造を明らかにするとともに、それらと関連した幾つかの群の構造に関する研究を行い、新たな知見を得た。

研究成果の概要(英文)：We obtained the following results concerning various groups related to graph complexes and the cohomology groups of moduli spaces: (1) We investigated the new kind of components appearing in the cokernel of the 6th Johnson homomorphism and showed the independence of the Enomoto-Satoh and Galois obstructions. (2) We determined the structure of the Lie algebra of Johnson images upto degree 8. (3) We computed the growth series of the fundamental groups of Seifert fibered spaces with natural generating systems (joint work with Michihiko Fujii). (4) In a joint work with Yuuki Tadokoro and Kokoro Tanaka, we studied the structure of groups defined by Kim-Manturov in their study on the space of triangulations of surfaces.

研究分野：トポロジー

キーワード：グラフ複体 グラフホモロジー 特性類 Johnson準同型 シンプレクティック微分 三角形分割

1. 研究開始当初の背景

2次元実多様体である有向曲面に複素構造や定曲率構造などの幾何構造を与えたものをリーマン面と呼ぶ。その幾何構造の豊かさを反映したリーマン面のモジュライ空間は、幾何に限らず、代数や函数論、さらには数理物理など様々な分野と関連した研究対象となっており、長い研究の歴史をもつ。一方、1980年代半ばに定義された計量グラフのモジュライ空間は幾何学的群論において多くの結果を生み出してきた。ここで、計量グラフはグラフという組み合わせの対象に計量(辺の長さ)を与えることで幾何的な扱いを可能にした研究対象である。これらのモジュライ空間を有理コホモロジー群(特性類)の構造を通じて位相幾何学的に理解することが研究の主目的であり、そのための手法として最も有効なのが、Kontsevich の理論である。この理論はモジュライ空間のセル分解の理論を巧妙な形でグラフ複体やそのホモロジー群と結びつけたものとなっている。グラフ複体は豊かな代数的構造を有していることが認識されており、近年多くの研究者が関心を寄せている。より具体的には、グラフホモロジーは巡回オペラッドを指定するごとに定まるものとなっており、上記のモジュライ空間の研究に対応しているのは、それぞれ結合型、リー型と呼ばれる巡回オペラッドである。最近になって、可換型の巡回オペラッドとの関連も重要視されるようになった。

一方、モジュライ空間にはモジュラー群と呼ばれる自然な群が存在する。リーマン面の場合には曲面の写像類群が対応し、計量グラフの場合には自由群の外部自己同型群が対応している。これらの群の研究の歴史もまた長いものとなっている。これらの群の有理コホモロジー群は上記のモジュライ空間の有理コホモロジー群と自然な形で同一視することができるため、モジュラー群の構造の解明を通じて我々の研究の目的を達成することも可能である。その際に、分担者(森田)が研究を進めてきた今日 Johnson-Morita 理論と呼ばれている Johnson 準同型を用いた曲面の写像類群、自由群の自己同型群の研究手法が非常に強力なものであることが知られており、代表者(逆井)、分担者(鈴木)もそれぞれ研究成果を有している。Johnson 準同型はシンプレクティック微分リー代数と呼ばれる代数的対象の中で定式化することができ、不変式論などの表現論の言葉を通じてリー型のグラフ複体と結びつくことが知られている。

以上のように、モジュライ空間をめぐるのはグラフ複体、モジュラー群、シンプレクティック微分リー代数といった一見異なる様々な対象が共存しており、その構造解明が求められていた。その中でもとくに、Johnson 準同型については全体を束ねる一つのキーワードとなっており、その像の決定問題など多くの研究課題が残されていた。代表者(逆井)やその研究グループでは、これまでに国際研究集会を複数回開催するなど、当該分野の発展に寄与してきた。

2. 研究の目的

上記の状況の下、モジュライ空間のコホモロジー群やそれに関連する群の構造とその応用に對して以下のような多角的アプローチを設定していた。

(1) Manivel の安定性を用いたトートロジー環の構造解明

分担者(森田)は1990年代の河澄響矢氏(東京大学)との共同研究において、あるシンプレクティック群の表現空間の不変部分を用いて、写像類群のコホモロジー環の中で Morita-Miller-Mumford 類(MMM 類)たちが生成する部分環(トートロジー環)が記述できることを証明した。一方、代表者と分担者の3人は、これまでの研究により、表現の重合に関連した Manivel の安定性の理論とシンプレクティック表現の不変部分の退化との間の関連性を示す現象を発見していた。そこから、トートロジー環についての Faber の有名な一連の予想との対応が観察される。Manivel の安定性を通じて表現の不変部分の退化の様子を調べ、MMM 類の間の新たな関係式を組織的に導出する。

(2) 計量グラフのモジュライ空間の有理コホモロジーと可換型のグラフホモロジーの関係

これまで、巡回オペラッドの型ごとにグラフホモロジー群とその幾何的解釈が扱われていたが、Chan-Galatius-Payne の結果により、リーマン面のモジュライ空間のコホモロジーと可換型のグラフホモロジーが関連づけられた。これにより型を横断する形での Kontsevich の理論の展開が期待される。計量グラフのモジュライ空間の有理コホモロジーと可換型のグラフホモロジーの関係をトロピカル曲線のモジュライ空間の構造を込めて考察し、とくに Morita 類を可換型のグラフホモロジーでとらえる。

(3) Borel regulator 類による MMM 類, Morita 類の統一的理解

代表者と分担者の3人は、モジュライ空間たちに付随したモジュラー群である曲面の写像類群や自由群の外部自己同型群、行列群 $Sp(Z)$, $GL(Z)$ たちの関係性に注目し、 $GL(Z)$ の代表的な

群コホモロジー類である Borel regulator 類の非安定域における消滅の様子の違いを利用して、曲面の写像類群、自由群の外部自己同型群それぞれに一連のコホモロジー類を定義した。前者については MMM 類と比例関係にあることを示し、後者については Morita 類と同じ次数、階数にあることから Morita 類と比例関係にあることを予想した。この予想が正しければ Morita 類の幾何学的意味や MMM 類との統一的解釈を与えるだけでなく、非自明性も得られる形となっている（現時点で第 3 Morita 類までの非自明性が別の方法で示されている）。代数的 K 群との関連を意識しながら、次数の低い順に直接的計算と理論的証明を試みる。

(4) 計算機を用いたグラフホモロジー群の計算

グラフホモロジーの直接的計算をリー型に対して試みる。とくに階数 7,8 の場合で、モジュライ空間の次元に近い部分の次数を中心に進める。これまでの研究により階数 11 までのオイラー数が判明しており、計算結果の非自明性は保証されている。

(5) リー型のシンプレクティック微分リー代数の詳細構造と 3 次元多様体論への応用。

リー型の巡回オペラッドに付随するシンプレクティック微分リー代数について、次数 1 部分が生成する部分リー代数を次数 8 まで決定し、一般的状況を定式化する。これは写像類群の有理 Johnson 準同型の像を決定するという位相的問題と等価である。また、種数 1 と高種数の間で見られる構造の差異を明らかにする。それらと並行して、このリー代数の構造の応用として、ホモロジー 3 球面の有限型不変量（次数 6 まで）の具体的公式の導出や曲面のホモロジー同境界群を通じた 3 次元多様体のホモロジー同境界不変量の構成を行う。

3. 研究の方法

(1) リー型のシンプレクティック微分リー代数の構造について、次数 8 の構造解明を行った。

具体的には計算機を用いた計算により Johnson 準同型の像を決定することを行った。我々の計算方法により完全決定まであと一步のところまで迫ったところで、Kupers と Randal-Williams の論文が発表され、計算の大幅な縮小が可能となった。

(2) 計量グラフのモジュライ空間の有理コホモロジーと可換型のグラフホモロジーの関係や、Borel regulator 類を用いた MMM 類や Morita 類の構成については、Kontsevich の定理の新しい解釈として、構成可能層の Verdier 双対性を用いる方法があると知り、その言葉で全体の構成を見直すことを試みた。

(3) 研究期間中に国際集会を複数回開催することや Bourgogne 大学などに滞在して関連する分野を研究している研究者との議論を行う計画であったが、2020 年に拡大した新型コロナ禍の影響で、それらを中止もしくはオンラインで大幅縮小せざるをえない状況になった。とくに、2020 年や 2021 年は当初の計画から大きく逸脱した研究状況となってしまった。

(4) (3)の状況の下で、モジュラー群と関連した群の構造について調べることで研究の応用の可能性を模索した。一つは藤井道彦氏（琉球大学）と共同で、Seifert ファイバー空間の基本群の自然な生成系に対する増大関数を考察し、一般の場合の具体的計算を行うプログラムの作成に取り組んだ。その際に、Johnson 準同型の像の計算で用いた技法が活かされている。もう一つの方向性として、田所勇樹氏（木更津高専）、田中心氏（東京学芸大学）と共同で、Kim-Manturov によって定義された、曲面の三角形分割の空間から作られる群の構造について調べた。この群はリーマン面のモジュライ空間の三角形分割から定まる複体の構造を踏まえて構成されるため、群のサイクルの構成にモジュライ空間の場合の方法が使えることが期待できた。

(5) 逆井と鈴木は、2019 年 9 月に Manchester 大学（イギリス）で開かれたグラフホモロジーをテーマとした国際研究集会に招待され、研究発表や情報収集を行った。また、河澄響矢氏（東京大学）や中村博昭氏（大阪大学）、Gwénaél Massuyeau 氏（Bourgogne 大学）、Christine Vespa 氏（Aix-Marseille 大学）と共同で「Johnson homomorphisms and related topics」と題した Johnson 準同型やモジュライ空間のコホモロジー、グラフホモロジーをテーマとした国際オンラインセミナーを運営し、その延長線として（何度かの延期の後）2023 年 9 月に国際研究集会を Research Station Les Diablerets（スイス）にて開催することができた。これらの機会でも得られた知見や研究者との交流は、その後の研究に非常に有益なものとなった。

4. 研究成果

研究代表者の逆井と研究分担者の森田茂之、鈴木正明との共同研究により以下の研究成果を得た。

(1) リー型のシンプレクティック微分リー代数について, 第6 Johnson 準同型の余核に現れていた新たな種の成分の構造を精密に調べた. その結果, 榎本-佐藤障害とガロア障害についてその独立性を示すことができた.

(2) 第6 Johnson 準同型の構造の解明に引き続き, 第8 Johnson 準同型の像の決定を行った. 我々の研究手法により, あと一歩で完全決定できるところまで至っていたが, 最後の部分については, 同時期に発表された Kupers と Randal-Williams の結果を用いることで埋めることができることが判明し(結果的には相補的な議論となっている), 像の決定を行うことに成功した. (1), (2) の結果については現在, 論文を準備中である.

以上に加えて

(3) 藤井氏との共同研究により, Seifert ファイバー空間の基本群として現れる群の自然な生成系に関する増大関数を与え, 一般の場合の具体的計算を行うプログラムを作成した. 本成果については論文

Michihiko Fujii, Takuya Sakasai, The spherical growth series of amalgamated free products of infinite cyclic groups.

にまとめ, 投稿を行った. また, 計算プログラムについては, 琉球大学学術リポジトリ (<http://hdl.handle.net/20.500.12000/0002019730>) にて公開した.

(4) 田所氏と田中氏との共同研究により, 上述の Kim-Manturov の群について群構造の解明を行った. この群の構造については, これまでほとんど明らかにされておらず, アーベル化の決定(非自明性の証明を含む)や特殊な場合の Property (T) の非保有が得られたことはこの群の構造の研究に着実に寄与するものと思われる. 加えて, 彼らの群の「Artin 化」と言える群を導入し, その群の構造に関して同様のことを調べた. これらは組み紐群と対称群の関係と並行するものであるが, 似ていない部分もあり, 今後の研究が期待できるものとなっている. 本成果については論文

Takuya Sakasai, Yuuki Tadokoro, Kokoro Tanaka, Minimal generating sets of groups of Kim-Manturov.

にまとめ, 現在投稿中である.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Shigeyuki Morita, Takuya Sakasai and Masaaki Suzuki	4. 巻 11
2. 論文標題 Torelli group, Johnson kernel and invariants of homology spheres	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Quantum Topology	6. 最初と最後の頁 379-410
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/QT/138	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Gwenaél Massuyeau and Takuya Sakasai	4. 巻 12
2. 論文標題 Morita's trace maps on the group of homology cobordisms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 775-818
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S179352531950064X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計27件（うち招待講演 13件 / うち国際学会 14件）

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 The symplectic derivation Lie algebra and the mapping class group of a surface
3. 学会等名 2022 Global KMS International Conference（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 On torsion degree functions
3. 学会等名 Mapping class groups and Quantum topology（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 逆井卓也
2. 発表標題 Teruaki for Mathematica
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ 2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 逆井卓也
2. 発表標題 (1) 群の Johnson 核のアーベル化の階数の有限性について (2) Johnson 核のアーベル化の表示について
3. 学会等名 写像類群の部分群のコホモロジーと特殊線型群の表現
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 On groups of Kim-Manturov
3. 学会等名 The 19th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Invariants of homologically fibered knots
3. 学会等名 Knot theory, LMO invariants and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 鈴木正明
2. 発表標題 On a theorem of Friedl and Vidussi
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 On the vanishing and the non-vanishing of the twisted Alexander polynomial
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Twisted Alexander vanishing order of knots
3. 学会等名 Winter School on Low-dimensional Topology, Pohang University of Science and Technology (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Twisted Alexander polynomials of knots associated to the regular representations of finite group
3. 学会等名 Knot theory, LMO invariants and related topics (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Shigeyuki Morita
2. 発表標題 Questions on $B\overline{\gamma}$
3. 学会等名 $B\overline{\gamma}$ School (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 森田茂之
2. 発表標題 特性類を巡って
3. 学会等名 第2回日本数学会賞小平邦彦賞 受賞講演会 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Higher dimensional extensions of Johnson homomorphisms via bordism groups
3. 学会等名 Geometry of discrete groups and hyperbolic spaces
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 逆井卓也
2. 発表標題 On a group of Kim-Manturov
3. 学会等名 Workshop on Groups in Geometry
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 逆井卓也
2. 発表標題 Minimal generating sets of groups of Kim-Manturov
3. 学会等名 Groups in Low-Dimensional Topology
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木正明
2. 発表標題 Knot group, symmetric group, dihedral group, and twisted Alexander polynomial
3. 学会等名 Groups in Low-Dimensional Topology
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木正明
2. 発表標題 Epimorphisms between two-bridge knot groups - crossing number, genus
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ2020
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 On a structure of the symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra
3. 学会等名 Teichmüller Theory: Classical, Higher, Super and Quantum (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Generating function on epimorphisms between 2-bridge knot groups
3. 学会等名 East Asian Conference on Geometric Topology 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Computations on Johnson homomorphisms and their applications
3. 学会等名 Computational Problems in Low-dimensional Topology II (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Johnson homomorphisms up to degree 7
3. 学会等名 Johnson homomorphisms and related topics 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takuya Sakasai
2. 発表標題 Computations in symplectic derivation Lie algebras and their applications
3. 学会等名 Graph complexes in algebraic geometry and topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaaki Suzuki
2. 発表標題 Symplectic derivation Lie algebra of the free Lie algebra
3. 学会等名 Graph complexes in algebraic geometry and topology (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鈴木正明
2. 発表標題 Two filtrations of the Torelli group
3. 学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 逆井卓也
2. 発表標題 Higher dimensional extensions of Johnson homomorphisms via bordism groups
3. 学会等名 低次元トポロジー in 白神 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鈴木正明
2. 発表標題 Computations of Johnson homomorphisms and symplectic derivation algebra
3. 学会等名 低次元トポロジー in 白神 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 逆井卓也
2. 発表標題 (1) Outer space and tropical curves, (2) Applications of the moduli space of tropical curves
3. 学会等名 リーマン面のモジュライ空間の諸相
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Homepage of Takuya SAKASAI https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~sakasai/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	森田 茂之 (Morita Shigeyuki) (70011674)	東京大学・大学院数理科学研究科・名誉教授 (12601)	
研究分担者	鈴木 正明 (Suzuki Masaaki) (70431616)	明治大学・総合数理学部・専任教授 (32682)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計3件

国際研究集会 Johnson homomorphisms and related topics 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 日本数学会季期研究所, The 14th MSJ- SI: New Aspects of Teichmuller theory	開催年 2022年～2023年

国際研究集会 Mapping class groups: pronilpotent and cohomological approaches	開催年 2023年 ~ 2023年
---	----------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------