

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19H01789

研究課題名（和文）量子確率論の展開と巨大有限系の漸近解析

研究課題名（英文）Quantum probability and asymptotic analysis of large finite systems

研究代表者

尾畑 伸明（Obata, Nobuaki）

東北大学・データ駆動科学・AI教育研究センター・特任教授

研究者番号：10169360

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 9,000,000円

研究成果の概要（和文）：量子分解は量子確率論における基本概念であり、統計性の源泉を非可換代数とその表現に帰することを主張するための鍵である。本研究では、量子分解の多変数化のための端緒として、成長するグラフ対から2変数スペクトル分布と付随する直交多項式的具体例を得た。多変数直交多項式系に対して定義される拡張ヤコビ行列に対して、退化指数という概念を導入してスペクトル測度の台を評価する最初の成果を得た。また、マイクスナー分布族を量子成分の非可換性によって分類して古典論を再現した。グラフの不変量として、距離行列を用いて二次埋込み定数(QEC)を導入して、具体的計算例を蓄積するとともにグラフの分類論の構築を開始した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

量子分解は、量子確率と古典確率を関連付けるための基礎概念として、本研究代表者と洞（分担者）によって定式化された。それは、グラフのスペクトル解析に量子確率論の手法を導入する動機付けとなり、直交多項式を量子確率論の枠組みで議論するきっかけを与えたため、これまでに一定の評価を得ている。本研究では、有限系のスペクトル解析を念頭に、多変数の確率分布を扱う理論、特に、量子分解の多変数化を軸とした新理論を拓くという点で独自性が高い。さらに、漸近的スペクトル解析は、Vershikの漸近的組合せ論の一翼を担い、確率論・量子論・表現論・組合せ論・関数解析などが出会う境界領域的色彩の強い研究課題である。

研究成果の概要（英文）：The quantum decomposition is a fundamental concept in quantum probability theory, serving as a key to attributing the source of statistical properties to noncommutative algebra and its representations. In this study, as a starting point for the multivariable extension of quantum decomposition, we obtained concrete examples of bivariate spectral distributions and associated orthogonal polynomials from pairs of growing graphs. For the extended Jacobi matrices defined by multivariable orthogonal polynomial systems, we introduced the concept of a deficiency index, achieving the first results in evaluating the support of the spectral measure. Moreover, we reproduced classical theory by classifying the family of Meixner distributions based on the noncommutativity of quantum components. As an invariant of graphs, we introduced the quadratic embedding constant (QEC) using distance matrices, accumulated concrete calculation examples, and began constructing a classification theory for graphs.

研究分野：基礎解析学

キーワード：量子確率論 スペクトル解析 漸近的組合せ論 代数的組合せ論 直交多項式 ネットワーク数理 グラフスペクトル 量子ホワイトノイズ

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

量子確率論は非可換確率論とも呼ばれ、そのルーツは量子論における古典・量子対応にある。古典的な変数 p, q をある交換関係を満たす作用素 P, Q に置き換える手続きを量子化と言う。与えられた状態の下で、 P, Q の作る非可換代数を適当なヒルベルト空間上の作用素として表現し、可観測量(自己共役作用素)のスペクトル分布から観測量の統計的性質を導出する。たとえば、位置作用素 Q のスペクトル分布は粒子の存在確率を意味し、ボゾン系では正規分布になる。一方、ボゾン粒子の位置作用素はボゾンフォック空間上の生成・消滅作用素 A^+, A を用いて $Q = A^+ + A$ と表されることから、古典的な正規確率変数が非可換な作用素(実際、 $[A, A^+] = I$) の和に分解される。ここに非可換構造が統計的性質を導くという量子確率の指導原理の典型を見ることができる。

Accardi-Bozejko (1998) は、ボゾン系など量子物理のモデルに限らず、1次元確率分布のガウス化という概念を導入し、モーメントをもつすべての1次元分布は相互作用フォック空間の真空期待値で実現されることを示した。この観点は Hora-Obata の著書(Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs, Springer, 2007)によって整理され、対称作用素 X の量子分解 $X = A^+ + A + A^0$ という概念に到達した。特に、 X が古典的な確率変数であれば、右辺のフォック表現から X の分布が再構成され、ボゾン代数とは限らない非可換代数が古典確率の文脈に現れるようになった。

Vershik (ICM1994) は巨大な有限系において組合せ論的な特徴量がどのように振舞うかを研究するコンセプトとして漸近的組合せ論(asymptotic combinatorics)を提案した。これに示唆された洞(研究分担者)は、距離正則グラフの系列に対してその極限スペクトル分布を導出した(1998)。古典論にとどまっていた洞の議論は、Hashimoto-Obata-Tabei (1998)、Accardi-Hashimoto-Obata (1998) によって量子確率論の立場から見直され、グラフの隣接行列の量子分解 $A = A^+ + A^- + A^0$ と右辺の非可換性を用いたスペクトル解析の手法が初めて導入された。このアイデアは、Hora-Obata の一連の研究で大きく発展し、特に、成長するグラフの漸近的スペクトル分布を中心極限定理の系として導出する理論が構築された。さらに、洞はヤンググラフ上のマルコフ連鎖の量子確率解析を無限対称群の漸近的表現論に応用した。

ブラウン運動(ウィナー過程)の量子分解は Hudson-Parthasarathy (1984) による伊藤解析の量子的拡張にすでに現れている。今の用語では、ブラウン運動は $B(t) = A^+(t) + A(t)$ のように時間軸上のボゾンフォック空間上の生成・消滅作用素を用いて量子分解される。彼らは、量子確率微分方程式と量子伊藤公式という新しい手法を導入して散逸量子系の問題を解いた。量子伊藤公式の本質は交換関係 $[dA, dA^+] = dt$ であり、伊藤公式 $(dB)^2 = dt$ はその帰結であることから、伊藤解析においても非可換構造が統計性を統制していることが垣間見られる。伊藤解析は今日では無限次元解析として大きく発展しているが、特にホワイトノイズ解析は量子的拡張と親和性がよく、Obata(1995)による量子確率過程の一般化の試みに始まって、Ji や Ouerdiane らとの一連の共同研究によって量子ホワイトノイズ解析として体系化された。最近では、量子ホワイトノイズ解析をボゾンフォック空間上の作用素論として、場の理論への応用も議論されている(Wawrzycki (2021) など)。

2. 研究の目的

非可換性が統計性を導くという指導原理に則って、古典論における統計的諸問題に対して、背後にある非可換性を抽出して非可換代数から統計的性質を導出する理論体系の構築と深化を図る。そのためには、できるだけ普遍的なスキームを構築することが重要であり、上に述べたように「量子分解」は道標の一つとして有用な概念であると考えられる。量子分解は潜在的には多くの対象に適用可能であると考えられるが、これまでに精緻な議論ができていたのは、1変数の場合、1変数の直積(連続無限直積の場合として量子ホワイトノイズ解析も含む)の場合である。グラフのスペクトル解析の文脈で言い換えれば、対象とするグラフが距離正則グラフあるいはそれに近いクラスということになる。その場合、量子分解の議論は本質的に1変数直交多項式論に帰着され、古典解析(スチルチェス変換、連分数展開など)の成果がフルに活用できるのが強みである。

本研究で扱う核心的な課題は、標語的には「これまでの1変数の議論を多変数化すること」にある。とりわけ、グラフなどの代数的組合せ論で扱われる有限系を題材として、(漸近的)スペクトル解析を軸として理論展開を目指す。結果として、多変数の確率分布(同時確率分布)を扱う理論と多変数化された量子分解法を構築し、巨大な有限系の漸近解析に応用することが目標となる。具体的には以下の4課題を掲げて、派生する諸問題も取り込むこととした。

(1) グラフの同時スペクトル分布と付随する多変数直交多項式の決定: グラフに付随する行列(隣接行列・ラプラス行列・距離行列など)のスペクトル分布と対応する多項式の諸性質をグラフ構造と関連付ける。特に、複数の行列から得られる同時スペクトル分布とその極限分布の具体的計算を通して、量子分解の多変数化の手がかりをつかむ。同時に、対応する多変数直交多項式を決定する。

(2) アソシエーションスキームに付随した量子分解法の変数化：距離正則グラフの隣接代数の拡張として、アソシエーションスキームの隣接作用素を扱う自然な流れを構築する。付随するターウィリガー代数の表現を通して、多変数化された量子分解の実例を収集して、理論的枠組みの構築に役立てる。

(3) 多変数直交多項式を特徴づける量子成分の非可換構造の抽出：多変数直交多項式に対するヤコビ関係式を多変数化された 3 重対角行列に対応させて、量子成分の交換関係を用いて多次元確率分布の特徴づけと分類を行う。とりわけ、古典的な確率分布族（マイクスナー族など）を背後にある非可換代数の特性で分類する。さらに、多次元確率分布が縮退するための条件などを念頭に、多次元確率分布の特性を非可換構造から導出する。

(4) 量子ホワイトノイズ解析の集大成：ボゾンフォック空間上の作用素論として、量子ホワイトノイズ微分を用いた作用素の特徴づけ、ユニタリ性の判定条件、正規積への変換と繰込みとの関係などの未解決問題の解決をめざす。量子ランダムウォークと呼ばれる離散量子系の連続極限と量子ホワイトノイズの関連から新しい展開を模索する。

3. 研究の方法

本研究は数学の理論研究であるので、文献調査と関連研究者との議論が基本である。研究分担者として、研究代表者と長年にわたる共同研究の実績をもつ洞彰人氏を加えている。同氏とは課題(1-3)について様々な形態で意見交換と共同研究を行った。特に、洞氏の最近の成果である無限対称群およびその拡張の表現論の成果から、2変数のスペクトル分布、2変数直交多項式の具体例が示唆された。代数的組合せ論の気鋭の研究者である田中太初氏を分担者に加え、課題(1-2)を中心に、代表者との共同研究を継続発展させることができた。さらに、最終年度には統計学者の荒木由布子氏を分担者に加えて、関数データ解析で用いられる基底関数系に多変数直交多項式を応用する試みを開始した。研究協力者として、周辺分野の研究者とは必要に応じて議論に加わってもらうこととした。特に、齊藤公明(名城大学)・Un Cig Ji(韓国チュンブク国立大学)・Hyun Jae Yoo(韓国ハンキョン国立大学)・Aurel Stan(オハイオ州立大学)・Edy Tri Baskoro(バンドン工科大学)らから専門的知識の提供を受けながら議論を進め、数編の共著論文を執筆した。

4. 研究成果

量子分解は、本研究代表者と洞(分担者)によって2000年頃に導入され定式化された概念である。とりわけ、成長するグラフの漸近的スペクトル解析に大きな効果を発揮し、その時点での成果をまとめた共著(2007年)は広く知られ今に至っている。また、最近の成果をまとめたものが、分担執筆された書籍によって公表されている[論文]。しかしながら、これまでは一変数直交多項式論に帰着する場合について深い結果が得られてきたが、「量子分解の多変数化」は大きな課題として残されてきた。本研究では、量子分解の多変数化に向けたいくつかのアプローチを課題として整理して、諸問題の解決を図るとともに、派生した課題についても積極的に取り扱った。特に、代数的組合せ論やグラフ理論に題材を求めて、巨大有限系のスペクトル解析(あるいは漸近的スペクトル解析)を軸として、多変数の確率分布を量子確率論の枠組みで扱う理論を端緒につけることができた。この方向性は、Vershikの漸近的組合せ論の流れに沿ったもので、確率論・量子論・表現論・組合せ論・関数解析などが出会う境界領域的研究としてさらなる発展が期待される[論文]。具体的な成果については以下に箇条書きで記す。

(1) 成長するグラフ対に付随する2変数確率分布と2変数直交多項式[論文]。成長するグラフの隣接行列の極限スペクトル分布の導出において、隣接行列の量子分解が極めて有効に働くためには、対象となるグラフが距離正則グラフ(またはその近似)でなくてはならず、そのおかげで1変数直交多項式論が援用できるという仕組みが根本にある。この観点から、成長するグラフに代えて成長するグラフ対を扱うことで、量子分解の多変数化を目指すのは自然なアイデアである。実際、強正則グラフ G の直積とその補グラフ G' の直積を対とした $(G^{\boxtimes n}, G'^{\boxtimes n})$ を扱った。隣接行列の対 (A_n, A'_n) に対して中心極限定理を証明し、スケール極限分布として2変数ポアソン分布、2変数正規分布、およびその混合分布を導出した。さらに、その混合分布に付随する直交多項式を2変数シャリエ-エルミート多項式で記述した。ハミンググラフに対して漸近的スペクトル分布を導出した洞(1998)の結果は、 G を完全グラフ、 G' を空グラフとして2変数の場合の特別なものとして再現される。

(2) 古典的パラメータをもつ距離正則グラフに対する極限分布の導出[論文]。Hara-Obata(2007)において成長する距離正則グラフに対して中心極限定理を証明したが、具体的な極限分布は、ハミンググラフ・ジョンソングラフ・オッドグラフなどいくつかの例に対して知られているにとどまっていた。本論文では、古典パラメータをもつ距離正則グラフに対して、ギブス状態(変形された真空状態)における極限分布を扱った。そのような距離正則グラフに対しては、隣接代数が3個のパラメータ q, α, β とグラフ直径 d によって記述され、ギブス状態のパラメータ t とともにパラメータ間のスケールバランスに多様性がある。この困難を乗り越えて、一般の場合について、極限分布を q -超幾何級数で表示することに成功した。具体例として、グラスマングラフの極限分布を ${}_2\phi_1$ 関数で記述して、洞(1998)が得たジョンソ

ングラフに関する結果を一般化した。さらに、双対ポーラーグラフ・ヘンメータグラフ・ウ
スチメントグラフほかについても極限分布を具体的に求めた。この結果は1変数の場合で
あるが、多変数化に向けた具体的な材料となるものである。

(3) 多変数確率分布の台とヤコビ係数の欠損ランク[論文]。1変数直交多項式に対するヤ
コビの3項間漸化式は、係数を行列とすることで多変数の場合に直接拡張される。そこでは、座
標関数による掛け算作用素(多変数多項式 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ に x_i を乗ずる演算)は自然に量子
分解され、 $x_i = a_i^+ + a_i^0 + a_i^-$ のように生成・保存・消滅作用素の和となる。ただし、これら
の量子成分はフォック空間の各階層に制限したときに行列となり、スカラーに過ぎなかった1
変数の場合に比べて複雑な様相を示す。座標関数による掛け算作用素の可換性のために、それら
量子成分はある種の交換関係を満たすが、逆に、そのような交換関係を満たす作用素からフォック
表現を構成して多変数確率分布の存在が示された。これは、ファヴァードの定理として知られ
ている1変数の場合の多変数版とみなされる。さらに、量子成分に対して欠損ランクという概念
を導入して、多変数確率分布に対して、欠損が生じることとその分布の台が低次元の代数多様体
の上にあることの同値性を証明した。これは多変数確率分布の台と量子成分を関連付ける結果
として初めてのものであるが、より一般に、多変数確率分布の特徴を量子成分の代数的性質で記
述する方向の研究は未開拓で興味深いものとして残された。

(4) マイクスナー族の量子成分[論文]。(3)で述べたように、多変数確率分布に付随す
る多変数直交多項式は、その量子成分の満たす交換関係によって特徴づけられる。本論文では、
3個の量子成分(生成・保存・消滅作用素)に代わり、2個の半量子作用素 $U_i = a_i^- + a^0/2$ と
 $V_i = a_i^+ + a^0/2$ を新たに導入して、多変数直交多項式の特徴づけを論じた。これによって、交
換関係式の個数が節約されるというメリットがある。特に、1変数確率分布として古典的である
マイクスナー族(ヤコビ係数が $n = n + 0$ と $n = \beta n^2 + (t -)n$ のように与えられる1
変数確率分布の族)について半量子成分の交換関係によって、古典的な分類(正規分布・ポアソ
ン分布・ガンマ分布・負の二項分布・双曲分布・二項分布)を再現できることを示した。この議
論を多変数化は、「量子分解の多変数化」への有望なアプローチであり継続研究中である。

(5) グラフのQ行列の正定値性[論文] グラフの距離行列 $D = [d(x, y)]$ の成分ごとの
指数関数 $Q = [q^{d(x, y)}]$ をグラフのQ行列と呼び、隣接代数のギブス状態(変形された真空状態)
の定義に必要である。その際に、Q行列の正定値性は重要であり、Q行列がすべての $q \in [0, 1]$
に対して正定値になることと D が条件付き負定値であることは同値な条件であることが知ら
れている(シェンベルグの定理)。さらに、この条件はグラフ G がユークリッド空間に2次埋込
可能である(つまり、グラフ G のユークリッド空間への埋込写像 $x \mapsto \phi(x)$ で、 $\|\phi(x) - \phi(y)\|^2$
 $= d(x, y)$ を満たすようなものが存在する)ことと同値である。これまでに、Q行列が正定値に
なるような q の領域について、グラフ G の何らかの特徴を反映するものとして研究を積み上
げてきたが、同時にその困難さも明らかになっていた。この観点から、Q行列がすべての q
 $\in [-1, 1]$ に対して正定値になるようなグラフ G は興味があるが、超立方体への埋込み可能性を用
いた特徴づけが得られたことで新しい展開につながるものとして期待できる。

(6) グラフの2次埋込定数[論文](5)で述べたように、距離行列 D が条
件付き負定値になるようなグラフ G に興味がある。そこで、グラフ G の2次埋込定数(QE定
数) $QEC(G)$ が2次形式 f, Df の条件 $f, f = 1$ と $1, f = 0$ の下での最大値として導
入された[Obata-Zakiyiah (2018)]。これを用いると、 D が条件付き負定値であることと $QEC(G)$
 ≥ 0 が同値になる。一方、 $QEC(G)$ はグラフ不変量であるから、QE定数を用いたグラフの分類
論が新しい課題として現れてきた。グラフの星型積 $G_1 * G_2$ のQE定数に関する公式は困難であ
るが有用な不等式を得た[論文]。その結果、パス P_n のQE定数が単調増加数列になるので、
それに沿ってグラフを分類することを試みて、 $QEC(G) < -1/2$ となるグラフ G の特徴づけに迫
った[論文]。また、グラフジョイン $G_1 + G_2$ のQE定数に関する公式を得た[論文]。QE
定数の幾何学的な意味として、グラフ G がユークリッド空間に2次埋込可能であるための必要
十分条件が $QEC(G) \geq 0$ であることは注目に値する。頂点数が6以下のすべてのグラフを、2次
埋込可能、2次埋込不可能、2次埋込不可能かつ素であるものに完全に分類した[論文]。その
過程で、完全多部グラフのうち2次埋込不可能かつ素なものを決定した[論文]。

本研究は2019~2022年度の4年計画であった。しかしながら、2020年2月頃に出現した新
型コロナウイルス感染症の影響が全世界に及び、大学の管理運営およびオンライン教育に係る
業務が激増したため、十分な研究時間の確保が困難になった。さらに、海外渡航の制限から、本
研究のコアとして位置付けていた国際共同研究も停滞せざるを得ない状況に陥った。繰越制度
を利用して、2023年度まで研究期間を延長したがようやく海外への渡航も含めて通常の研究活
動に戻ることができたのは2022年度後半からであった。このような状況のため、国際共同研究
遂行が限定的になり、特に量子ホワイトノイズ解析に関しては研究が停滞したことは残念であ
る。一方、インドネシアやポーランドの研究者とともにグラフの2次埋込定数に関する共同研究
が進展したことで、研究の幅が広がり新しい方向性が生まれてきたと言える。

< 発表論文 >

- Ameur Dhahri, Nobuaki Obata and Hyun Jae Yoo: *J. Math. Anal. Appl.* 485 (2020) 123775.
Wojciech Mlotkowski and Nobuaki Obata: *Hokkaido Math. J.* 49 (2020) 129-163.
John Vincent S. Morales, Nobuaki Obata, Hajime Tanaka: *Colloq. Math.* 162 (2020), 1-22.
Edy Tri Baskoro and Nobuaki Obata: *Electronic J. Graph Theo. Appl.* 9(2021), 545-566.
Masoumeh Koohestani, Nobuaki Obata and Hajime Tanaka: *SIGMA* 17(2021) 104.
Zhenzhen Lou, Nobuaki Obata and Qiongxian Huang: *Graphs Combinat.* 38 (2022), 161.
Takeshi Hirai and Akihito Hora: *Kyoto J. Math.* 62 (2022).
Nobuaki Obata: *Interdiscip. Inform. Sci.* 29(2023), 141-156.
Nobuaki Obata: *Electronic J. Graph Theo. Appl.* 11 (2023), 511-527.
Hajime Tanaka: *Linear Algebra Appl.* 671 (2023), 59-66.
Edy Tri Baskoro and Nobuaki Obata: *Commun. Combin. Optim.* (2024), in press.
Nobuaki Obata, Aurel I. Stan and Hiroaki Yoshida: *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* (2024) in press.
Nobuaki Obata: Quantum probability approach to spectral analysis of growing graphs, *Groups and Graphs, Designs and Dynamics* (R. A. Bailey, Peter J. Cameron and Yaokun Wu, Eds.), Chapter 2 を分担執筆, pp. 87-175. London Mathematical Society Lecture Notes Series Vol. 491, Cambridge University Press, 2024.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 8件 / うちオープンアクセス 9件）

1. 著者名 Nobuaki Obata, Aurel I. Stan and Hiroaki Yoshida	4. 巻 -
2. 論文標題 Meixner random variables and their quantum operators	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Edy Tri Baskoro and Nobuaki Obata	4. 巻 -
2. 論文標題 A classification of graphs through quadratic embedding constants and clique graph insights	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Communications in Combinatorics and Optimization	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する
1. 著者名 Tanaka Hajime	4. 巻 671
2. 論文標題 Characterizing graphs with fully positive semidefinite Q-matrices	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Linear Algebra and its Applications	6. 最初と最後の頁 59 ~ 66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.laa.2023.04.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Obata Nobuaki	4. 巻 11
2. 論文標題 Complete multipartite graphs of non-QE class	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Graph Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 511 ~ 527
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5614/ejgta.2023.11.2.14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Obata Nobuaki	4. 巻 29
2. 論文標題 Primary Non-QE Graphs on Six Vertices	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Interdisciplinary Information Sciences	6. 最初と最後の頁 141 ~ 156
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4036/iis.2023.R.01	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Hirai Takeshi, Hora Akihito	4. 巻 62
2. 論文標題 Projective representations and spin characters of complex reflection groups $G(m,p,n)$ and $G(m,p)$, III	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2021-0019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Lou Zhenzhen, Obata Nobuaki, Huang Qionxiang	4. 巻 38
2. 論文標題 Quadratic Embedding Constants of Graph Joins	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 161
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00373-022-02569-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Baskoro Edy Tri, Obata Nobuaki	4. 巻 9
2. 論文標題 Determining finite connected graphs along the quadratic embedding constants of paths	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Electronic Journal of Graph Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 545-566
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5614/ejgta.2021.9.2.23	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Koohestani Masoumeh, Obata Nobuaki, Tanaka Hajime	4. 巻 17
2. 論文標題 Scaling Limits for the Gibbs States on Distance-Regular Graphs with Classical Parameters	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 104
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2021.104	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Wojciech Mlotkowski and Nobuaki Obata	4. 巻 49
2. 論文標題 On quadratic embedding constants of star product graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 129 ~ 163
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Morales John Vincent S., Obata Nobuaki, Tanaka Hajime	4. 巻 162
2. 論文標題 Asymptotic joint spectra of Cartesian powers of strongly regular graphs and bivariate Charlier-Hermite polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Colloquium Mathematicum	6. 最初と最後の頁 1 ~ 22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4064/cm7724-7-2019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Ameur Dhahri, Nobuaki Obata, Hyun Jae Yoo	4. 巻 485
2. 論文標題 Multivariate orthogonal polynomials: Quantum decomposition, deficiency rank and support of measure	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 12375
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2019.123775	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計11件(うち招待講演 6件/うち国際学会 11件)

1. 発表者名 Obata Nobuaki
2. 発表標題 A quantitative approach to quadratic embedding constants of graphs
3. 学会等名 The 7th Tunisian-Japanese Conference: Geometric and Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces and Applications (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Obata Nobuaki
2. 発表標題 On quadratic embedding constants of graphs
3. 学会等名 The 25th Indonesia-Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs and Games (IJDCGG3 2023) (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Obata Nobuaki
2. 発表標題 Positivity of Q-matrices and quadratic embedding constants of graphs
3. 学会等名 10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM2023) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Obata Nobuaki
2. 発表標題 Quadratic embedding of graphs and positivity of their Q-matrices
3. 学会等名 Workshop on Quantum Probability and Infinite Dimensional Analysis in honor of Professor Hui-Hsiung Kuo (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Tanaka Hajime
2. 発表標題 Scaling limits for the Gibbs states on distance-regular graphs with classical parameters
3. 学会等名 19th Workshop: Noncommutative Probability, Noncommutative Harmonic Analysis and Related Topics, with Applications (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Obata Nobuaki
2. 発表標題 Positive definite Q-matrices and primary non-QE graphs
3. 学会等名 19th Workshop: Noncommutative Probability, Noncommutative Harmonic Analysis and Related Topics, with Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Obata Nobuaki
2. 発表標題 Some recent results on quadratic embedding constants of graphs
3. 学会等名 International Conference on Graph Theory and Information Security V2022 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Obata Nobuaki
2. 発表標題 Asymptotic spectral distributions for growing distance-regular graphs
3. 学会等名 AMS Spring Eastern Virtual Sectional Meeting: Special Session on Quantum Probability, Orthogonal Polynomials, and Special Functions (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Obata Nobuaki
2. 発表標題 Quadratic embedding constants of graphs
3. 学会等名 International Conference on Mathematics, Geometry, Statistics, and Computation 2021 (Online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Nobuaki Obata
2. 発表標題 Quadratic embedding constants of graphs
3. 学会等名 Non-Commutative Probability and Related Fields, Ochanomizu University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Nobuaki Obata
2. 発表標題 Spectral analysis of growing graphs: A quantum probability point of view
3. 学会等名 Mini-Course Lectures, International Conference and PhD-Master Summer School on Groups and Graphs, Designs and Dynamics (G2D2), Three Gorges Mathematical Research Center, China (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Nobuaki Obata	4. 発行年 2024年
2. 出版社 Cambridge University Press	5. 総ページ数 -
3. 書名 Groups and Graphs, Designs and Dynamics Chapter 2: Quantum probability approach to spectral analysis of growing graphs	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	洞 彰人 (Hora Akihito) (10212200)	北海道大学・理学研究院・教授 (10101)	
研究分担者	田中 太初 (Tanaka Hajime) (50466546)	東北大学・情報科学研究科・准教授 (11301)	
研究分担者	荒木 由布子 (Araki Yuko) (80403913)	東北大学・情報科学研究科・教授 (11301)	最終年度(2022年度)のみ

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Connecticut	Ohio State University		
ポーランド	Wroclaw University			
イラン	Isfahan University of Technology			
インドネシア	Institute Technology Bandung			
韓国	Hankyong national University	Chungbuk National University		
イタリア	Politecnico di Milano			