様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　５ 月 ３１ 日現在

機関番号：３４３１０
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｈ０１７９４

研究課題名（和文）特異摂動型微分方程式の解の大域構造と完全WKB解析

研究課題名（英文）Global structure of solutions for differential equations of singular perturbation type and exact WKB analysis

研究代表者

竹井　義次（TAKEI, Yoshitsugu）

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号：００２１２０１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　6,700,000円

研究成果の概要（和文）：非線型や差分方程式も含めた微分方程式系の完全WKB解析の理論整備に取り組み、パンルヴェ方程式や超幾何系を完全WKB解析の立場から考察した。パンルヴェ方程式の雛型であるリッカチ方程式のインスタントン解の解析的意味付けの問題が解決されると共に、ベッセル函数が満たす差分方程式のストークス幾何の構造の決定、連立の微分差分方程式系を用いたウェーバー函数のヴォロス係数の決定、及びガウスの超幾何函数の積分表示式の自然な導出、等の諸結果が得られた。また、時間依存シュレディンガー方程式の初期値問題のWKB型の形式解の解析的意味付けが、対応する確率微分方程式を利用して得られることもいくつかの場合に示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
完全WKB解析が非線型や差分方程式も含む一般の微分方程式系に拡張されれば、その解の大域解析が大きく進展するものと期待され、本研究の研究成果はそれに向けての第一歩と考えられる。例えば、リッカチ方程式のインスタントン解の意味付けの問題の解決はインスタントン解を用いた非線型方程式の大域解析の可能性の証左となる成果であり、ヴォロス係数の決定や積分表示式の導出に連立の微分差分方程式系が有効に用いられたことは差分方程式の完全WKB解析の将来性を保証する。さらに、時間依存シュレディンガー方程式の初期値問題のWKB型の形式解に関する結果は、完全WKB解析と確率微分方程式の思わぬ関連性を示唆している。

研究成果の概要（英文）：To establish the exact WKB analysis for systems of differential equations including nonlinear equations and difference equations we study Painleve equations and hypergeometric systems from the viewpoint of the exact WKB analysis. Consequently the problem of analytic interpretation of instanton solutions for Riccati equations, which can be considered as prototype of Painleve equations, is solved and further the following new results are obtained: the structure of Stokes geometry of the difference equation for Bessel functions is clarified, Voros coefficients of Weber functions are determined and integral representations of Gauss' hypergeometric functions are derived by utilizing a system of differential-difference equations. It is also shown that WKB-type formal solutions of initial value problems for time-dependent Schrodinger equations can be analytically interpreted in several simple cases through stochastic differential equations.

研究分野：微分方程式の完全WKB解析

キーワード：関数方程式論　漸近解析　代数解析　完全WKB解析　パンルヴェ方程式　超幾何函数　ホロノミック系　ヴォロス係数

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

プランク定数を微小パラメータとして含むシュレディンガー方程式のような特異摂動型の線型常微分方程式に対しては、その古典極限として得られる代数曲線とその上の微分形式により帰納的に定義される、WKB 解と呼ばれる無限級数解が存在する。A. Voros (Ann. Inst. H. Poincare, 39 巻, 1983) と H. Silverstone (Phys. Rev. Lett., 55 巻, 1985) に始まる完全 WKB 解析では、発散級数解であるこの WKB 解にボレル総和法を利用して解析的な意味付けを与える。その最大の特徴は、上記の微分形式により定まる変わり点とストークス曲線からなるストークス幾何、及びストークス曲線上で起こる WKB 解のストークス現象を記述する接続公式が、WKB 解のボレル和の大域挙動を統制している点にある。この特徴を利用して、20 世紀の終わりに我々は、「特異点がすべて確定特異点であるフックス型の２階線型常微分方程式に対しては、その解の大域挙動を記述するモノドロミー群が、確定特異点での特性指数、及び WKB 解の定義に現れる代数曲線上の微分形式の周回積分（いわゆるヴォロス係数）によって表される」という結果を示した (cf. T. Kawai and Y. Takei: 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008)。

その後我々は、この結果の拡張を目指し、パンルヴェ方程式等の非線型常微分方程式や高階の線型常微分方程式に対して完全 WKB 解析の理論を整備することに取り組んできた。しかし、パンルヴェ方程式のストークス現象を記述する際の形式解として用いられるインスタントン解には、S. Garoufalidis 等 (S. Garoufalidis, A. Its, A. Kapaev and M. Marino: Int. Math. Res. Not., 2012) により指摘されているように、指数的に大きな項の無限級数を含むという発散の困難が存在する。また、高階常微分方程式の完全 WKB 解析には、新しいストークス曲線や仮想的変わり点 (cf. N. Honda, T. Kawai and Y. Takei: Virtual Turning Points, Springer, 2015) に加えて、最近発見された非遺伝性の二重変わり点といった高階方程式特有の厄介な問題がつきまとう。さらに、研究代表者は N. Joshi 氏と共同で II 型のパンルヴェ方程式に付随する I 型の差分パンルヴェ方程式 (alt-dPI) のストークス現象に関する明示的な接続公式を得たが (N. Joshi and Y. Takei: RIMS Kokyuroku Bessatsu, B61 巻, 2017)、差分方程式に対する完全 WKB 解析というテーマも、まだほとんど手つかずの重要な研究テーマである。

こうした状況の中、最近特にパンルヴェ方程式のインスタントン解に対する解析的意味付けの問題の解決に繋がる画期的なアイデアが得られるなど、上述の困難点が克服できる見通しが立ちつつある。そこで、あらためてこの機会に、パンルヴェ方程式や線型の微分方程式系を含むより一般の特異摂動型の微分方程式や差分方程式に対して、完全 WKB 解析による解の大域構造を解析することを目標に、完全 WKB 解析の理論整備を図ることを目指すことにした。

２．研究の目的

本研究の目的を一言でいえば、発散の困難という問題を有するパンルヴェ方程式のインスタントン解に解析的な意味付けを与え、パンルヴェ方程式を含めた線型や非線型の微分方程式（系）、さらには差分方程式に対する完全 WKB 解析を用いた解の大域解析を行うために、完全 WKB 解析のより一層の理論整備を図ることである。

パンルヴェ方程式のインスタントン解の構成法としては、多重スケール解析とバーコフ標準形を用いる方法の２つがある。このうち後者の方法を用いれば、パンルヴェ方程式から楕円函数の方程式への変換が自然に得られ、その変換級数のボレル総和可能性を示すことでインスタントン解の解析的意味付けが得られる。本研究の第一の具体的目標は、このパンルヴェ方程式を楕円函数の方程式へうつす変換級数のボレル総和可能性を検証し、それを利用して完全 WKB 解析によるパンルヴェ方程式の解の大域解析の理論を完成することである。これが達成されれば、高階パンルヴェ方程式への拡張等を論じることも可能になることが期待される。

実際に高階パンルヴェ方程式への拡張を論じる際には、上記のインスタントン解の意味付けに加えてモノドロミー保存変形、すなわちパンルヴェ方程式に付随するラックス対と呼ばれる線型偏微分方程式系の大域解析も必要になる。こうした連立の線型方程式系の解析は、新しいストークス曲線や仮想的変わり点といった厄介な問題の存在する高階常微分方程式の完全 WKB 解析と密接に関係してくる。そこで本研究の第二の具体的目標として、（多変数）超幾何系をはじめとする線型偏微分方程式系、及びその制限として得られる高階線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析の理論整備、を設定する。最近の研究で発見された非遺伝性二重変わり点の解析がこのテーマにおける一つの中心課題である。

さらに、パンルヴェ方程式や超幾何方程式はそれぞれベックルンド変換や隣接関係式と呼ばれる差分構造を有しており、その結果としてそれらの微分方程式の解はある種の差分方程式も満たしている。こうした差分方程式の完全 WKB 解析は、まだ余り研究が進んでいない重要なテーマの一つである。実際にパンルヴェ方程式や超幾何方程式の解が満たす差分方程式の解析にあたっては、すべての構造を考慮に入れた連立の微分差分方程式系を扱う方が自然であり、それはまた解の大域挙動を記述するのに重要なヴォロス係数の解析にも繋がってくる。以上の状況を踏まえ、パンルヴェ方程式や超幾何方程式に付随する差分方程式に対する完全 WKB 解析の

展開を、本研究の第三の目標として掲げたい。
こうした目標に向けての研究を進める中で、完全 WKB 解析を用いたパンルヴェ方程式や超幾何方程式の解の大域解析がより深化することが期待される。パンルヴェ方程式や超幾何方程式の解析を通じて、より広範な微分方程式や差分方程式、及びそれらの連立系に対する完全 WKB 解析の理論整備を図ることが本研究の最終目標である。

３．研究の方法

パンルヴェ方程式のインスタントン解に解析的意味付けを与えることを主たる目標としつつ、微分方程式や差分方程式、及びそれらの連立系に対する完全 WKB 解析のより一層の理論整備を目指して、研究協力者達と定期的に行うセミナーや討論を研究の中心に据えて研究を進める。以下では、上記の「２．研究の目的」の項で述べた具体的な研究目標の達成に向けてどのように研究を進めて行くかについて、項目毎に述べる。

（１）バーコフ標準形への変換を利用して構成されるパンルヴェ方程式を楕円函数の方程式にうつす変換級数は、インスタントン解のような指数項は含まないという著しい特長をもつ。インスタントン解の解析的意味付けを得るために、この変換級数のボレル総和可能性を検証する。まずはパンルヴェ方程式の場合の雛型と考えられるリッカチ方程式の線型化の場合のボレル総和可能性がどのように導かれるかを明らかにした後、パンルヴェ方程式の場合の変換級数のボレル総和可能性を考察する。この変換級数はパンルヴェ方程式の形式べき級数解の一般化とも考えられるので、形式べき級数解のボレル総和可能性を示した神本-小池の論文 (RIMS Kokyuroku Bessatsu, B40 巻, 2013) を参考にしながら議論を進めたい。

（２）パンルヴェ方程式には、付随する代数曲線の次数に応じた数の異なるインスタントン解が存在する。解析的意味付けの議論がうまく進めば、その応用として、これらの異なるインスタントン解の間に成立する関係も求めてみたい。楕円函数の場合には、フーリエ級数展開との関係を示した青木の結果 (RIMS Kokyuroku, 1014 巻, 1997) により既に具体的な関係式が得られている。これを踏まえて、パンルヴェ方程式の場合も同様な考察を行う。パンルヴェ方程式とモノドロミー保存変形との関連が一つの鍵になるものと思われる。この関係式が得られれば、パンルヴェ方程式の初期値空間とインスタントン解の関係が自ずと明らかになり、非線型モノドロミーといったパンルヴェ方程式の解の大域解析が非常に明示的な形で可能になるものと期待される。

（３）線型偏微分方程式系、及びその制限として得られる高階線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析の理論整備については、多変数の超幾何系、特に(1,4)型や(2,3)型の２変数超幾何系をはじめとする具体的な方程式に対する解析を中心に研究を進める。新しいストークス曲線や仮想的変わり点の問題を念頭に、ストークス幾何の構造を明らかにすることが中心課題である。特に高階方程式に関しては、最近の研究で発見された非遺伝的二重変わり点の影響を調べることも重要である。幸い、研究協力者の廣瀬三平氏や佐々木真二氏（共に芝浦工大）により多くの数値計算結果が得られているので、この数値計算をさらに推し進めると共に、スプリンガー社から刊行予定の英文の共著書の原稿を準備するという形でこれまでの成果をまとめてみたい。また、研究が順調に進めば、完全 WKB 解析を用いて２変数超幾何系のモノドロミー群を具体的に計算することにも取り組みたい。

（４）差分方程式の場合、微小差分を考えることが微分方程式の場合の特異摂動を考えることに相当する。こうした微小差分の差分方程式に対する完全 WKB 解析に関しては、まずは隣接関係式を介して超幾何方程式に付随する具体的な線型の差分方程式から解析を始める。ベッセル函数やウェーバー函数、ガウスの超幾何函数達が満たす線型差分方程式について、WKB 解やストークス幾何、さらにストークス現象を記述する接続公式といった完全 WKB 解析的な構造を明らかにしたい。それと同時に、単独の差分方程式を扱うだけではなく、元の微分方程式も含めた連立の微分差分方程式系を完全 WKB 解析の立場から考察し、解の大域挙動の記述に重要なヴォロス係数の解析との関連についても議論できればと考えている。

（５）線型差分方程式に対する完全 WKB 解析の議論が順調に進めば、次にベックルンド変換を介してパンルヴェ方程式に付随する非線型の差分方程式にも研究対象を拡げる。既に得られているＩ型の差分パンルヴェ方程式 (alt-dPI) に対する結果を、他の差分パンルヴェ方程式に拡張できるかどうかが問題である。さらに、パンルヴェ方程式のインスタントン解に対する解析的意味付けの問題が解決すれば、それを利用して、差分パンルヴェ方程式のインスタントン解に関するストークス現象の構造も論じてみたい。このあたりまで議論が進めば、その中から差分方程式に対する完全 WKB 解析の一般論の建設への足掛かりも得られるのではないかと思われる。

以上のいずれの項目についても、パンルヴェ方程式及び超幾何方程式の解析や、超局所解析及び漸近解析の視点からの考察が研究の進展の鍵になると思われる。前者については、研究協力者の岩木耕平（東大）、廣瀬三平、佐々木真二、Nalini Joshi（シドニー大）の各氏と、また後者については研究協力者の神本晋吾（広島大）、青木貴史（近畿大）、河合隆裕（京大）、Reinhard Schaefke（ストラスブール大）の各氏と、それぞれセミナーでの討論やメール等を通じて緊密な連絡を取り合いながら研究を進めて行く。

４．研究成果

本研究の研究期間（2019 年度～2023 年度）は新型コロナウイルス感染症の影響が大きかった時期と重なっており、数年間は外国出張が不可能になるなど、国内外の研究協力者との研究連絡に多大な支障が生じた。そのため研究計画の遂行にも遅れが生じたが、そうした状況下でも「２．研究の目的」や「３．研究の方法」で述べた研究目標に関していくつかの進展が得られた。また、当初は想定していなかった思いがけない発見も見出された。こうした研究の進展や新たに得られた研究成果について、以下では項目毎に記述する。

（１）パンルヴェ方程式に対する大域的な漸近解析を展開する際に重要な役割を果たすインスタントン解は、構造がより簡単なリッカチ方程式にも存在する。パンルヴェ方程式に対するインスタントン解の解析的意味付けの問題への第一歩として、線型化を利用したリッカチ方程式に対するインスタントン解の解析的意味付けの問題を考察し、リッカチ方程式の場合は線型化を与える変換級数がリッカチ方程式自体の特異摂動解を用いて明示的に表されること、さらにその明示的表示式から変換級数のボレル総和可能性が直ちに従うことを証明した。特に後者の結果から、リッカチ方程式のインスタントン解の解析的意味付けが自然に従う。残念ながらパンルヴェ方程式のインスタントン解の解析的意味付けまでは得られなかったが、バーコフ標準形によるパンルヴェ方程式の楕円函数への変換、特にその変換級数のボレル総和可能性が、パンルヴェ方程式の大域漸近解析において重要な位置を占めることは明らかになったと思われる。

（２）廣瀬三平氏、佐々木真二氏、及び河合隆裕氏とのホロノミック系やその制限として得られる高階線型常微分方程式に対する完全 WKB 解析に関する共同研究については、多変数超幾何系のモノドロミー群を具体的に計算する段階までには至らなかったものの、ペアシー系とその変数をさらに増やした A_4 型の超幾何系、及び(1,4)型の２変数超幾何系を題材として、非遺伝性の二重変わり点とそれに付随して現れるストークス幾何の退化についていろいろな新しい知見が得られた。特に、非遺伝性の二重変わり点に由来する微分方程式の周期の構造に対する理解が深まった。非遺伝性の二重変わり点を中心としたこれらの成果をまとめた英文の共著書の原稿もほぼ完成し、近々スプリンガー社から刊行の予定である。

（３）一方、差分方程式に対する完全 WKB 解析についても、いくつか新たな結果が得られた。まず大学院生の伊藤駿君（同志社大）との共同研究では、解の積分表示式を利用してベッセル関数が満たす２階差分方程式の完全 WKB 解析的な構造を調べ、その WKB 解やストークス幾何、接続公式等の特徴を明らかにした。特に、ストークス曲線の交点から無限本の新しいストークス曲線が現れるという興味深い現象を見出すことに成功した。また、竹井優美子氏（茨城高専）との共同研究では、ガウスの超幾何関数やその合流型の特殊函数（クンマーの合流超幾何函数、ベッセル函数、ウェーバー函数）が満たす隣接関係式に由来する差分方程式について、単に差分方程式のみではなく微分方程式も一緒にした連立の微分差分方程式系を考察することにより、WKB 型の形式解の存在に加えて、次のような注目すべき結果を得た。問題の微分差分方程式系に対して、差分方程式の独立変数であるパラメータに関する逆ラプラス変換を考える。このとき、逆ラプラス変換により得られる微分方程式系の WKB 解は有限級数となり、そのラプラス変換は古典的に良く知られたガウスの超幾何函数やその合流型の積分表示式を与える。さらに、ベルヌイ数を用いたウェーバー方程式の WKB 解のヴォロス係数の具体的表示式が、上述の微分差分方程式系の WKB 解を用いることにより直接導出される。これらの結果は、隣接関係式を含んだ連立の微分差分方程式系が（合流型）超幾何関数の解析に非常に有用であることを示唆している。

（４）常微分方程式の完全 WKB 解析の応用例として、紫垣孝洋氏（関西学院大、現在は大阪電通大）が素粒子物理学に現れる或る常微分方程式の固有値問題に対して、完全 WKB 解析の立場から興味深い考察を行っている。それに関連する問題として、単純極のまわりでの WKB 解（正確にはそのボレル和）と収束べき級数解の対応関係を論じ、合流操作を利用することで両者の間に成り立つ線形関係式を具体的に決定することに成功した。紫垣氏が主に扱った「幽霊型」の変わり点（確定特異点）のまわりでの WKB 解と収束べき級数解の対応関係を明らかにすることが今後の課題である。

（５）以上の研究成果とは少し内容が異なるが、大学院生の山下恭平君、百田友輝君（共に同志社大）達と、プランク定数を含んだ時間依存シュレディンガー方程式の初期値問題に対する WKB 型の形式解の解析的意味付けの問題について、確率微分方程式の手法を援用する新たな研究を開始した。確率微分方程式の分野では、時間依存シュレディンガー方程式の初期値問題の解が、ファインマン・カッツの定理を介して対応する確率微分方程式の解を利用して得られることが知られている。この結果をプランク定数が含まれている半古典型のシュレディンガー方程式の場合に応用し、初期値問題に対する WKB 型の形式解の解析的意味付けが対応する確率微分方程式の解を利用して得られることを次のような場合に示した。(a) 複素熱方程式の場合、(b) 確率微分方程式がランジュバン方程式となる場合、(c) シュレディンガー方程式が１次のポテンシャル項を含む場合、(d) シュレディンガー方程式の係数函数の一部に２次の項が含まれる場合。この結果をより一般の時間依存シュレディンガー方程式に拡張することは今後の課題であるが、それが達成されれば完全 WKB 解析と確率微分方程式の思わぬ関連性が明らかになるものと期待される。

以上述べたように、本研究の大きな目標であった「楕円函数への変換を用いたパンルヴェ方程式に対するインスタントン解の解析的意味付け」という問題を解決するには至らなかったものの、差分方程式に対する完全 WKB 解析、特に（合流型）超幾何函数が満たす連立の微分差分方程

式系に対する完全 WKB 解析については大きな進展が見られた。さらに、時間依存シュレディンガー方程式の初期値問題に対する WKB 型の形式解と確率微分方程式の関連など、新たな研究の芽と言えるべき結果も見出された。こうした意味で、本研究は十分な成果をもたらしたと考えられる。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Hirose Sampei、Kawai Takahiro、Sasaki Shinji、Takei Yoshitsugu	４．巻 57
２．論文標題 On the Stokes Geometry of Perturbed Tangential Pearcey Systems	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences	６．最初と最後の頁 727～754
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/57-3-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takei Yoshitsugu	４．巻 14
２．論文標題 Riccati Equations Revisited: Linearization and Analytic Interpretation of Instanton-Type Solutions	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Complex Analysis and Operator Theory	６．最初と最後の頁 Article No 78
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11785-020-01033-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Takei Yoshitsugu	４．巻 -
２．論文標題 On the instanton-type expansions for Painleve transcendents and elliptic functions	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Complex Differential and Difference Equations (De Gruyter Proceedings in Mathematics)	６．最初と最後の頁 365～378
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/9783110611427-014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計9件（うち招待講演　9件／うち国際学会　8件）

１．発表者名 Yoshitsugu Takei
２．発表標題 On the exact WKB analysis for difference equations
３．学会等名 Complex Differential and Difference Equations II（ベドレボ数学研究・会議センター，ポーランド）（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

1．発表者名 Yoshitsugu Takei
2．発表標題 On the exact WKB analysis for difference equations
3．学会等名 Frontiers in Nonlinear Differential Equations and Stokes Phenomena（沖縄科学技術大学院大学(OIST)，沖縄県）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名 Yoshitsugu Takei
2．発表標題 On the exact WKB analysis for difference equations
3．学会等名 Various Problems in Microlocal Analysis and Asymptotic Analysis（京都大学数理解析研究所，京都市）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2023年

1．発表者名 Yoshitsugu Takei
2．発表標題 On two-parameter instanton-type solutions of Painleve equations and their analytic interpretation
3．学会等名 Physical resurgence: On quantum, gauge, and stringy（ケンブリッジ大学ニュートン研究所，英国）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

1．発表者名 Yoshitsugu Takei
2．発表標題 Comparison between WKB solutions and convergent solutions at a regular singular point of simple pole type via the confluence
3．学会等名 Prospects in microlocal analysis and asymptotic analysis（京都大学数理解析研究所，京都市）（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

１．発表者名 Yoshitsugu Takei
２．発表標題 Global study of differential equations via the exact WKB --- from Schrodinger equations to Painleve equations,
３．学会等名 Applicable resurgent asymptotics: towards a universal theory（オンライン，ケンブリッジ大学ニュートン研究所，英国）（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Yoshitsugu Takei
２．発表標題 On the instanton-type formal solutions of Painleve equations
３．学会等名 Exact WKB Analysis, Microlocal Analysis, Painleve Equations and Related Topics（オンライン，京都大学数理解析研究所，京都市）（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2021年

１．発表者名 竹井義次
２．発表標題 微分方程式の完全WKB解析について --- 複素解析と漸近解析の一つの接点 ---
３．学会等名 第19回岡シンポジウム（オンライン，奈良女子大学，奈良市）（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Sampei Hirose, Takahiro Kawai and Yoshitsugu Takei
２．発表標題 On crossing phenomenon of three ordinary Stokes curves for third-order ordinary differential equations
３．学会等名 RIMS Conference "Microloccal Analysis and Asymptotic Analysis"（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計1件

1．著者名	4．発行年
Galina Filipuk, Alberto Lastra, Slawomir Michalik, Yoshitsugu Takei and Henryk Zoladek (eds.)	2019年
2．出版社	5．総ページ数
De Gruyter	462
3．書名	
Complex Differential and Difference Equations (De Gruyter Proceedings in Mathematics)	

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	岩木　耕平 (IWAKI Kohei)		
研究協力者	廣瀬　三平 (HIROSE Sampei)		
研究協力者	佐々木　真二 (SASAKI Shinji)		
研究協力者	神本　晋吾 (KAMIMOTO Shingo)		
研究協力者	青木　貴史 (AOKI Takashi)		

６．研究組織（つづき）

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	河合　隆裕 (KAWAI Takahiro)		
研究協力者	竹井　優美子 (TAKEI Yumiko)		
研究協力者	ジョシ　ナリーニ (JOSHI Nalini)		
研究協力者	シェフケ　ラインハルト (Schaefke Reinhard)		

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関