

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19H01795

研究課題名（和文）強双曲型方程式において弱零条件の果たす役割の解明

研究課題名（英文）Elucidation of weak null structure of strongly hyperbolic systems

研究代表者

久保 英夫（Kubo, Hideo）

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：50283346

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 11,800,000円

研究成果の概要（和文）：アインシュタイン方程式はこの宇宙の幾何に関する方程式であり、通常、時間と空間が混在した形で記述される。しかし、この宇宙が時間と共にどのように変化するかを見るには適切な表現ではないため、数値相対論の分野では3+1形式と呼ばれる座標系を採用することで、アインシュタイン方程式を時間発展方程式として捉え直している。本研究では、この形式において一般論をどこまで展開できるのかを調べるとともに、シュバルツシルド時空のような特異性をもつ変数係数の非線型波動方程式の時間大域解の存在について検討した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究を通して、3+1形式と呼ばれる座標系はただ一つに決まるものではなく、時間軸の設定を適切に行わなければ、アインシュタイン方程式を時間発展方程式とみることができないことが明らかになった。具体的には、ブラックホールに対応するシュバルツシルド時空などでは適切な時間軸の選び方が知られているが、一般論を展開するには解決すべき課題があることがわかった。一方で、特異性をもつ変数係数の波動方程式の解析ではレリッヒの不等式が有効であることを明らかにすることができた。これにより、ブラックホールに近い初期状態からこの宇宙がどのように時間発展するかを解析できる可能性がみえてきた。

研究成果の概要（英文）：The Einstein equation describes the geometry of our universe without distinguishing space and time in a standard form. But such a formulation is not convenient to find out the time evolution of our universe, so that a special coordinate system, that is called 1+3 formalism, was introduced and the Einstein equation is reformulated as an evolution equation in numerical relativity. In this research we examined the possibility to develop the general theory in 3+1 formalism and considered the global existence in time for nonlinear wave equations with singular variable coefficient like the Schwarzschild spacetime.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：双曲型方程式 非線型摂動 弱零条件 大域挙動 漸近解析

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 近年の観測技術の発展により、重力場を発生源とする重力波の直接観察が可能となっており、その情報をもとにして、強重力場自身の観測への道が拓かれようとしている。そのため、一般相対論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式を理論的に解析し、中性子星やブラックホールを発生源とする重力波の波形の大域的な挙動を調べ、観測結果と比較することが重要さを増している。

(2) 一般相対論が座標系の選び方によらない共变的な理論であることを利用して、調和座標と呼ばれる特別な座標系を選び、物質場のない真空中におけるアインシュタイン方程式を計量に対する準線型波動方程式に帰着する場合、その初期値問題の適切性はよく知られている。更に、同じ枠組みにおいて、その初期値問題の大域可解性ととも弱零条件という概念が導入されている。

(3) アインシュタイン方程式はこの宇宙の幾何に関する方程式であり、通常、時間と空間が混在した形で記述される。しかし、この宇宙が時間と共にどのように変化するかを見るには適切な表現ではないため、アインシュタイン方程式を時間発展方程式とみなすための枠組みが必要であった。その枠組みの構築には、数値相対論の分野で標準的に用いられている、座標系を時間的座標軸が常に時間的であるように選ぶことによって得られる 3+1 形式が参考になると思われた。

2. 研究の目的

(1) アインシュタイン方程式をプロトタイプとする強双曲型方程式に対する非線型摂動について、その安定性を弱零条件として特徴付けること。

(2) これまで調和座標において調べられてきたアインシュタイン方程式の解の大域挙動の解析を 3+1 形式において行うこと。

3. 研究の方法

(1) 数値相対論の分野で標準的に用いられている、座標系を時間的座標軸が常に時間的であるように選ぶことによって得られる 3+1 形式に着目した。この定式化では、まず、時空を空間的超平面によってスライスし、ラプス関数とシフトベクトルにより座標系を張る。アインシュタイン方程式の共変性に由来するゲージに関する自由度により、このような座標系を採用しても一般性を失うことはない。この座標系においてローレンツ計量の 3+1 分解を行い、この分解に従ってアインシュタイン方程式を書き下すと、時間に依存しない拘束条件(ハミルトン拘束条件、運動量拘束条件)と時間発展する空間的超曲面の外的曲率に関する双曲型の方程式が得られる。このローレンツ計量の 3+1 分解により得られる方程式系は ADM 形式と呼ばれるが、これは弱双曲型の方程式であり、初期値の微小摂動に関して時間大域的な安定性に問題がある。その困難を克服するために導入されたのが BSSN 形式であり、実際、方程式系は強双曲型となり、アダマールの意味で適切となる。こうした理由から、我々はアインシュタイン方程式の BSSN 形式を解析の対象とした。

(2) アインシュタイン方程式の重要な特殊解にシュバルツシルド時空がある。このシュバルツシルド時空を扱うために、特異性をもつ変数係数の非線型波動方程式の時間大域解の存在について検討した。その特異性のオーダーはラプシアンと丁度釣り合うようなものであり、繊細な解析が必要となる。

その解析において重要な点は、線型化方程式の解の陽的な表示を用いることなく、重み付きエネルギー法により解を構成することである。解表示を利用すれば、解の各点的な挙動を導くことができ、解の主要部が光円錐に集中しており、そこから離れた領域では解の減衰度が強くなることを示すことができる。しかし、アインシュタイン方程式の解析への応用を視野に入れると、解の陽的な表示を得ることは望めないため、エネルギー評価式において、解の主要部が光円錐に集中していることを陰的に表すような重み関数を導入することを考えた。この重み付きエネルギー評価とそれに対応する重み付きソボレフの不等式を組み合わせ、特異性をもつ変数係数の波動方程式が非線型摂動に対して安定となるような非線型指数の決定を目指した。

4. 研究成果

(1) 3+1 形式を用いれば、時間的座標軸が常に時間的であるように思われたが、実際にはラプス関数の選び方に強く依存することが明らかとなった。シュバルツシルド時空のような具体的なものに対しては、時間的座標軸が常に時間的であるようにラプス関数を選ぶことができるが、そうならないラプス関数の選び方も十分に豊富である。従って、一般の初期値問題において、時

間的座標軸が常に時間的であるようなラプラス関数を選ぶことは困難であり、一般論の構築には本質的な難しさがあると考えられる。しかし、物理現象に基づき、この宇宙が時間発展しているという描像が正しいとすれば、適切なラプラス関数を決定するような手続きを見出せるはずである。少なくともシュバルツシルド時空からの微小な摂動について、そのような手続きを構築できる可能性は高いので、その方向で検討を進めたい。

(2) 特異性を有する変数係数を伴う波動方程式の解析ではレリッヒの不等式が有効であることを明らかにした。更に、その事実は特異性を持つポテンシャル項により摂動されたラプラシアンの本質的自己共役性とも密接に関係している。実際、レリッヒの不等式は原点における特異性をラプラシアンによって制御するものであり、この制御可能性が本質的自己共役性に結び付いている。このレリッヒの不等式を応用することにより、波動方程式の解の挙動を特徴付けるのに相応しい重み関数を伴う各点的な評価を導くことができた。これはソボレフの不等式の一般化とみなすことができるが、同時に各点評価導くのに必要な関数の滑らかさは原点における特異性の制御をどの程度まで要求するか依存することを示唆するものとなっている。

具体的に、特異性をもつ変数係数の非線型波動方程式の解析にレリッヒの不等式を応用するに際しては、自己無頓着となるようなアプリオリ評価が必要となるため、重み付きエネルギー評価を導出した。このエネルギー評価はモラベッツ型のエネルギー不等式を一般化したものであり、重み関数にパラメータを導入し、非線型摂動のオーダーを反映させることができるように拡張されている。これにより解の陽的な表示を用いることなく、光円錐から離れた領域では解の減衰度が強くなることを導き、解の主要部が光円錐に集中していることを間接的に示すことができた。まとめると、重み付きモラベッツ型エネルギー評価式とレリッヒの不等式から導かれる重み付きソボレフの不等式を組み合わせることで、特異性をもつ変数係数の波動方程式が非線型摂動に対して安定となるような非線型指数の十分条件を決定したことになる。

一方、必要性についても検討し、その指数よりも非線型項のオーダーが等しいか小さい場合には有限時間内に解が爆発することを突き止めている。その研究では、方程式を更に一般化し、散逸効果を含むような場合にも有限時間爆発が起こるような指数に関する十分条件を導いた。

また、非線型項のオーダーが丁度、臨界指数となるとときには、解の最大存在時刻を初期値の振幅をパラメータとして評価することにより、得られた臨界指数が自然なものであることの検証を試みた。その上からの評価は既に得られており、下からの評価については、上からの評価と同じオーダーを導くための最後の詰めの段階にある。

以上のように特異性をもつ変数係数の非線型波動方程式の解析に一つの枠組みを与えることはできたが、双曲型方程式の解析では避けて通ることのできない、微分の損失の解消については未だ不十分な状態にとどまっている。具体的には、高階の微分を評価するために方程式を微分すると、特異性が強くなってしまったため、レリッヒの不等式を介した、ラシアンによる制御が効かなくなってしまうという困難が生じる。このため、形式的なレベルの計算では、非線型項に未知関数の微分が含まれていても問題はないが、所望のアプリオリ評価を得るに至っていない。これまでの研究では、零構造を扱う際に、速く減衰する特別な微分を抽出し、その減衰の強さを利用して、所望のアプリオリ評価を導いていたが、特異性をもつ係数がある場合には、減衰度のみならず、微分可能性の獲得が鍵となるようである。従って、弱零構造の特徴付けを行うには、空間の位相を弱めて、弱零構造自身の形を最大限に活用することにより、微分の獲得を実現するなど、新たな視点から解析を進める必要があることが明らかとなった。

(3) 今後の展望としては、上述したように $3+1$ 形式における適切なラプラス関数の決定法の確立、及び、弱零構造自身が有する微分の獲得の仕組みの解明に関して、より本質的な課題に取り組むことになる。また、副産物として、対称作用素の本質的自己共役性に関して、ポテンシャル項の特異性の強さと非摂動項の微分のオーダーに密接な関係があることが出版予定の論文において示唆されている。この事実は梁の方程式など弾性体の解析への応用が期待される。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Vladimir Georgiev and Hideo Kubo	4. 巻 375
2. 論文標題 Global solvability for nonlinear wave equations with singular potential	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 514-537
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jde.2023.08.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kimitoshi Tsutaya and Yuta Wakasugi	4. 巻 451
2. 論文標題 Remarks on Blow up of Solutions of Nonlinear Wave Equations in Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker Spacetime	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematical Physics and Its Interactions, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-981-97-0364-7_6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kato Masakazu, Kubo Hideo	4. 巻 Trends in Mathematics
2. 論文標題 On the Cauchy Problem for the Nonlinear Wave Equation with Damping and Potential	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Harmonic Analysis and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 45 ~ 61
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-031-24311-0_3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Georgiev Vladimir, Kubo Hideo	4. 巻 Trends in Mathematics
2. 論文標題 On the Rellich Type Inequality for Schroedinger Operators with Singular Potential	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Harmonic Analysis and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 77 ~ 89
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-031-24311-0_5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka Tomoyuki, Wakasa Kyouhei	4. 巻 41
2. 論文標題 On the critical decay for the wave equation with a cubic convolution in 3D	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Discrete & Continuous Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 4545 ~ 4545
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/dcds.2021048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ikeda Masahiro, Tanaka Tomoyuki, Wakasa Kyouhei	4. 巻 270
2. 論文標題 Critical exponent for the wave equation with a time-dependent scale invariant damping and a cubic convolution	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 916 ~ 946
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2020.08.047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Wei Dai, Hideo Kubo, Motohiro Sobajima	4. 巻 57
2. 論文標題 Blow-up for Strauss type wave equation with damping and potential	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis: Real World Applications	6. 最初と最後の頁 103195
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.nonrwa.2020.103195	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiro Ikeda, Tomoyuki Tanaka, Kyouhei Wakasa	4. 巻 200
2. 論文標題 Small data blow-up for the wave equation with a time-dependent scale invariant damping and a cubic convolution for slowly decaying initial data	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 NONLINEAR ANALYSIS-THEORY METHODS & APPLICATIONS	6. 最初と最後の頁 112057
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2020.112057	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 15件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 Global existence for nonlinear wave equations perturbed by the inverse-square potential below the Rellich constant
3. 学会等名 第18回浜松偏微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 若狭恭平
2. 発表標題 On the critical decay for the wave equation with a cubic convolution in three space dimensions
3. 学会等名 Workshop on Nonlinear Hyperbolic PDEs（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 加藤正和
2. 発表標題 消散項とポテンシャル項を伴う非線型波動方程式の臨界指数について
3. 学会等名 One day workshop on Nonlinear wave equations（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 加藤正和
2. 発表標題 弱い消散項を伴う非線型波動方程式の解の時間大域存在と爆発について
3. 学会等名 室蘭工業大学数理科学談話会（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 Global existence for semilinear wave equations with potential of inverse-square type
3. 学会等名 応用解析研究会（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 On the Rellich type inequality for Schroedinger operators with potential of inverse-square type
3. 学会等名 Mathematical Analysis of Nonlinear Dispersive and Wave Equations（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 逆二乗型ポテンシャルを伴う非線型波動方程式の解析（Part 1）
3. 学会等名 第43回発展方程式若手セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 重み付きRellich 型不等式とその応用
3. 学会等名 非線型偏微分方程式と走化性（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 Global existence and blow-up for nonlinear wave equations with inverse-square potential
3. 学会等名 第24回北東数学解析研究会 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 On the effect of slowly decreasing initial data for nonlinear wave equations with damping and potential in the scaling critical regime
3. 学会等名 13th ISAAC Congress 2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 低階項を伴う非線型波動方程式の初期値問題について
3. 学会等名 東京大学解析学火曜セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 On the nonlinear wave equation with lower order terms
3. 学会等名 Seminar of Applications of Differential Equations in Sciences (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 On the semilinear wave equation with lower order terms
3. 学会等名 第37回 九州における偏微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 非線型波動方程式に対する幾何学のおよび双対的アプローチ
3. 学会等名 9回室蘭非線形解析研究会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 Asymptotic behavior for the nonlinear damped wave equation with a positive potential
3. 学会等名 信州大学偏微分方程式研究集会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 久保英夫
2. 発表標題 Critical exponent for nonlinear damped wave equations with non-negative potential in 3D
3. 学会等名 偏微分方程式セミナー
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Y. Giga, N. Hamamuki, H. Kuroda, T. Ozawa, H. Kubo	4. 発行年 2020年
2. 出版社 Mathematical Society of Japan	5. 総ページ数 543
3. 書名 The role of metrics in the theory of partial differential equations, Advanced Studies in Pure Mathematics, 85	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	加藤 正和 (KATO MASAKAZU) (30526679)	室蘭工業大学・大学院工学研究科・講師 (10103)	
研究分担者	津田谷 公利 (TSUTAYA KIMITOSHI) (60250411)	弘前大学・理工学研究科・教授 (11101)	
研究分担者	若狭 恭平 (WAKASA KYOUHEI) (60783404)	釧路工業高等専門学校・創造工学科・講師 (50103)	
研究分担者	Yordanov Borislav (Yordanov Borislav) (50839199)	北海道大学・高等教育推進機構・助教 (10101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 第48回偏微分方程式論札幌シンポジウム	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Workshop on Nonlinear Hyperbolic PDEs	開催年 2023年～2023年

国際研究集会 第47回偏微分方程式論札幌シンポジウム	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 第21回北東数学解析研究会	開催年 2020年～2020年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------