

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2019～2021

課題番号：19H01799

研究課題名（和文）「多成分偏微分方程式系の解析的研究」

研究課題名（英文）Mathematical analysis for multi-component system of partial differential equations

研究代表者

鈴木 貴（Suzuki, Takashi）

大阪大学・数理・データ科学教育研究センター・特任教授（常勤）

研究者番号：40114516

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 13,500,000円

研究成果の概要（和文）：理論科学や工学に現れる偏微分方程式系において、多成分間の相互作用によって生ずる解の様々な挙動を、スケーリング等の大域解析学による手法で明らかにした。特に空間2次元の指数型楕円型方程式系とスモルコフスキー・ポアソンの爆発解において質量量子化が実現され、その特異点の位置が点渦系ハミルトニアンによって制御されること、関連する2次元正規化リッチ流に関する拡散幾何の結果が勾配不等式と臨界多様体の理論によって再現されることを示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数理科学や工学で用いられる数理モデルの多くは非線形偏微分方程式の連立系で記述される。本研究は、自己組織化が同一テンプレートのコピーとして出現されること（量子化）や、同一のハミルトニアンによって個別粒子の運動が集約されて連続分布となり、さらにその連続分布が集約されて粒子としてふるまう現象（循環的階層）を、新規に開拓した大域解析学の方法で解明し、数学のみならず関連分野に新たな視座を与えたものである。

研究成果の概要（英文）：We have clarified the behavior of the solution to the system of partial differential equations in theoretical sciences and engineering, using the method of global analysis such as scaling. Particularly, mass quantization and the control of the singular spots by the point vortex Hamiltonian are confirmed for 2D elliptic equations with exponential nonlinearity and 2D Smoluchowski-Poisson equation. Geometric results on the 2D normalized Ricci flow are also recovered by the theory of gradient inequality and critical manifold.

研究分野：非線形偏微分方程式、応用解析学

キーワード：非線形偏微分方程式 大域解析学 非平衡統計力学 自由境界問題 特異性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

乱流の中に長時間現出する秩序構造、腫瘍の形成や多種生物の相互作用、ダム内に見出される自由境界を支配するテンソル、界面として現れる電磁波の特異性など、偏微分方程式は、生命や物性など自然界に現れる現象を理解し、予測して制御するための基本的なモデルである。解の存在と一意性に関する基本定理だけでなく、爆発機構も含め、多彩で深遠な大域的描像を現出するその力学系を解明することは、数理解析学の大きなミッションであり、変分構造やスケーリングによって、解の存在や一意性を制御する臨界指数という基本的な概念が定着してきた。しかし、双対法、エントロピー法、ラグランジュ法という新しい手法が開発されるとともに、多成分系においては、各成分の相互作用が補完して、臨界指数が遠くに押しやられる現象が提示され始めている。これらの成果は、現時点では解析技術の改良に伴う断片的な進歩にすぎないが、多数の変数の相互作用によってシステム全体が安定化する現象の多くは、それらを支配する本質的な原理が隠されているものと考えられる。

## 2. 研究の目的

多成分の相互作用の補完によって特異性が消滅し、臨界指数や爆発機構が変動する状況がどこまで有効であるかについて、関数解析学と大域解析学を用いた新しい解析法によって明らかにする。変数が多くなればそのダイナミクスは複雑になり、数学解析は困難になるというのが方程式論の常識であり、数学が明らかにしてきた対象は比較的少数の変数に関するモデルに限られる傾向があった。一方で、乱流の中に見出される秩序、多数の遺伝子、細胞、種が、階層を越えて相互作用する生命現象など、多様で複雑な状況の中にロバストで安定な構造が見出される現象は確かにあり、その理解にはこれまでとは異なる視点からの数学が必要である。

## 3. 研究の方法

本研究は、変分構造やスケーリングを用いた解析に加えて双対法や勾配不等式などの関数解析学、ラグランジュ座標で記述した変換テンソルの解消などの大域解析学を新規に応用し、これらの問いに応えるもので、方法も対象も従来とは異なる視点をもつ。

## 4. 研究成果

### (1) 多種生物や物質の相互作用を記述する反応拡散方程式の解の時間大域的挙動

多成分の相互作用によって特異性が解消されて解が均質化することを、数理生態学のモデルを用いて分析した。多変数が2次反応を引き起こす常微分方程式系において、質量保存と複数のエントロピーを有する多数のカテゴリーを見出し、特に定常解以外のすべての解が周期的になる方程式系を導出した。さらに、数理生態学モデルにおいてポアソン構造が成り立つものに着目し、微分形式を用いて記述される可積分系を定式化した。

次いでこの構造を反応拡散系に拡張し、空間2次元のロトカ・ボルテラ系で常にプレコンパクトな大域軌道が存在することを、空間2次元で初めて明らかにした。さらに質量散逸の下での時空の $L^2$ 評価、双対写像のコンパクト性に関するリースの定理を用いた弱軌道の $L^1$ コンパクト性を証明した。これらの結果は、反応拡散系の研究を急速に進展させ、Fellner 他により、2次の増大度をもち、正值性と全質量を保存する反応拡散系では、任意の次元において常にプレコンパクトな大域軌道が存在することが明らかにされるに至った。

### (2) 多強度点渦系平衡平均場方程式に関連するモデルの量子化する爆発機構の解明

点渦平均場方程式は、カオスの伝播という条件の下に現れるキルヒホッフの点渦方程式の極限である。代表者による1990年の古典的な結果以来、後者をハミルトン系で書いたときのハミルトニアンが、前者の解の凝縮現象を広く制御している原理(循環的階層)が認識され、広範な研究が積み重ねられている。本研究では、対称化の方法を適用し、コラプス質量とスケーリング極限で現出する全域解の全質量が等しいことを主張する質量等式を導出し、この不等式をもとに、精密な爆発解析によってスケールされた解のテールを評価して、Y.Y. リイ型の局所一様評価、

特異極限を支配するハミルトニアンの臨界点と解の線形化作用素の非退化性やモース指数の一致（漸近非退化性）が成り立つ非線形項を極限まで拡張した。

点渦平均場方程式は、楕円型・放物型の連立系であるスモルコフスキー・ポアソンの定常状態を場の変数で記述したものである。これまで有限次元と無限次元の爆発解の挙動について質量量子化とハミルトニアンの制御が知られていたが、これらの証明をスケールリングと2次元モーメントの解析を用いて簡略化し、空間2次元における動的循環的階層原理を確立した。

空間2次元の正規化リッチ流はポアンカレ予想に対する拡散幾何からのアプローチとして定式化されたものである。微分幾何学の方法によって解の時間大域的存在と定スカラー曲率曲面への収束とそのレートが知られていたが、本研究ではこの方程式を一般化して、スモルコフスキー・ポアソン方程式と類似の熱力学構造をもつ方程式を導出し、Trudinger-Moser不等式、Moserの反復法、ペニラン型不等式、集中コンパクト原理、臨界多様体と勾配不等式を用いた非線形解析の枠組みで、収束レートを除いてそれらの結果のすべてを再現した。また収束レートの解析によって、この方程式は中心多様体理論が適用できない枠組みにあることも明らかにした。

ブラウン粒子に対する非平衡小正準統計力学によって、質量保存、エネルギー保存、エントロピー増大の法則を持つ平均場方程式が知られていたが、特に空間2次元の古典粒子について、エントロピー生成有界の下でプレコンパクトな大域軌道が存在することを証明した。

### (3) ダム内に浸透する水領域など自由境界探索に現れるテンソルの制御

領域変分の計算でテンソルの大規模なキャンセルが発生することを、移動する座標での積分量の時間に関する高階微分に関するリュールビルの公式を詳細に研究することによって明らかにした。特にグリスパールの公式によって2階偏導関数において曲面の第2基本形式が残ること、またディリクレ積分のように被積分関数に微分を含んだものの領域変動について別の項が現れること、角のような形状に特異性をもつ領域に対して標準的でない楕円型正則性が成り立つこと、リュールビルの面積公式が微分形式の変換によって得られることを明らかにした。

次いでこれらの成果をグリーン関数や固有値に対するアダマール変分の計算に適用し、グリーン関数ではノイマン境界条件化での第2変分を確定した。また固有値については重複する場合の再編方法を明示的に表示して、100年来の先行研究結果を精密に再現することに成功した。

### (4) マクスウェル方程式など保存系の解の界面消滅

代表者は、定常マクスウェル方程式（アンペールの法則）において、見かけ上の過剰決定性により、界面を貫く正則性が標準的なものより改善される成分があること（界面消滅）を明らかにした。その後ストークス方程式への拡張、微分形式を用いた表記など、いくつかの進展がなされてきたが、これらはいずれも定常的な楕円型理論の枠組みにとどまっていたが、本研究では電磁波の時間発展問題でも同様に界面消滅が達成されていることを明らかにした。この成果はこれまでの定常解に関する結果を1次微分形式に書き直すことに端を発し、非定常マクスウェル方程式がミンコフスキー計量下での2次微分形式で記述できることに注目したものである。本研究により統一的な解析方法が確立したことで、現在では、任意次数の微分形式や双対形の方程式への拡張、多様体上の微分形式の取り扱い、数理物理学への応用など、周辺研究が精力的に進められるに至っている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計19件（うち査読付論文 19件／うち国際共著 10件／うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 Ishii Katsuyuki、Pierre Michel、Suzuki Takashi	4. 巻 11
2. 論文標題 Quasilinear Parabolic Equations Associated with Semilinear Parabolic Equations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 758 ~ 758
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/math11030758	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Suzuki Takashi	4. 巻 36
2. 論文標題 Mathematical study of Streater's model on Brownian particle gas	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Differential and Integral Equations	6. 最初と最後の頁 45-58
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.57262/die036-0102-45	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Sato Tomohiko、Suzuki Takashi	4. 巻 202
2. 論文標題 Morse indices of the solutions to the inhomogeneous elliptic equation with exponentially dominated nonlinearities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 551 ~ 599
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10231-022-01252-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kavallaris Nikos I.、Suzuki Takashi	4. 巻 221
2. 論文標題 Gradient inequality and convergence to steady-states of the normalized Ricci flow on surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 112906 ~ 112906
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.na.2022.112906	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Suzuki Takashi	4. 巻 128
2. 論文標題 Local and global behavior of solutions to 2 D-elliptic equation with exponentially-dominated nonlinearities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Asymptotic Analysis	6. 最初と最後の頁 465 ~ 494
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3233/ASY-211713	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kavallaris Nikos I., Suzuki Takashi	4. 巻 221
2. 論文標題 Gradient inequality and convergence to steady-states of the normalized Ricci flow on surfaces	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 112906 ~ 112906
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.na.2022.112906	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Yaacob Noorehan, Shafie Sharidan, Suzuki Takashi, Admon Mohd Ariff	4. 巻 1988
2. 論文標題 Level set method for free boundary of invasive cancer cell using different functions of matrix metalloproteinases	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Conference Series	6. 最初と最後の頁 012020 ~ 012020
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1742-6596/1988/1/012020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Latos Evangelos, Suzuki Takashi	4. 巻 4
2. 論文標題 Quasilinear reaction diffusion systems with mass dissipation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Mathematics in Engineering	6. 最初と最後の頁 1 ~ 13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3934/mine.2022042	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Sawada Ken、Suzuki Takashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Relaxation Dynamics of Point Vortices	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Vortex Dynamics - From Physical to Mathematical	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5772/intechopen.100585	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Suzuki	4. 巻 30 (2)
2. 論文標題 INTERFACE VANISHING FOR NONSTATIONARY MAXWELL EQUATION	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematical Sciences and Applications	6. 最初と最後の頁 555 ~ 570
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yang Yunqing、Suzuki Takashi、Cheng Xueping	4. 巻 99
2. 論文標題 Darboux transformations and exact solutions for the integrable nonlocal Lakshmanan-Porsezian-Daniel equation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Applied Mathematics Letters	6. 最初と最後の頁 105998 ~ 105998
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aml.2019.105998	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Takashi Suzuki	4. 巻 25
2. 論文標題 Dissipative reaction diffusion systems with polynomial growth	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. Differential Equations	6. 最初と最後の頁 81~104
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ando Kazunori, Kang Hyeonbae, Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 140
2. 論文標題 Convergence rate for eigenvalues of the elastic Neumann Poincare operator in two dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal de Mathmatiques Pures et Appliquees	6. 最初と最後の頁 211 ~ 229
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.matpur.2020.06.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ando Kazunori, Kang Hyeonbae, Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 不明
2. 論文標題 Spectral structure of the Neumann-Poincare operator on thin domains in two dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal d'Analyse Mathmatique	6. 最初と最後の頁 不明
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Ando Kazunori, Ji Yong-Gwan, Kang Hyeonbae, Kawagoe Daisuke, Miyanishi Yoshihisa	4. 巻 36
2. 論文標題 Spectral structure of the Neumann Poincare operator on tori	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Henri Poincare C, Analyse non lineaire	6. 最初と最後の頁 1817 ~ 1828
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.anihpc.2019.05.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Suzuki Takashi, Toyota Yohei	4. 巻 58
2. 論文標題 2D Trudinger-Moser inequality for Boltzmann-Poisson equation with continuously distributed multi-intensities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Calculus of Variations and Partial Differential Equations	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00526-019-1520-5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Suzuki、Kentarou Fujie	4. 巻 28(1)
2. 論文標題 Global existence and boundedness in a fully parabolic 2D attractionrepulsion system: chometaxis-dominant case	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Adv. Math. Sci. Appl	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fellner Klemens、Latos Evangelos、Suzuki Takashi	4. 巻 190
2. 論文標題 Large-time asymptotics of a public goods game model with diffusion	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Monatshefte fur Mathematik	6. 最初と最後の頁 101 ~ 121
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00605-019-01275-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Pierre Michel、Suzuki Takashi、Yamada Yoshio	4. 巻 68
2. 論文標題 Dissipative reaction diffusion systems with quadratic growth	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 291 ~ 322
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1512/iumj.2019.68.7447	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

[学会発表] 計8件(うち招待講演 0件/うち国際学会 0件)

1. 発表者名 鈴木 貴
2. 発表標題 ブラウン粒子気体モデルの数学解析
3. 学会等名 日本数学会 2023年度年会
4. 発表年 2023年



1. 発表者名 鈴木 貴
2. 発表標題 領域変分固有値の微分可能性
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (グループ型A)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 鈴木 貴
2. 発表標題 領域変動に関する固有値の微分可能性
3. 学会等名 日本数学会 2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木 貴
2. 発表標題 変分固有値の調和凸性と自由境界問題への応用
3. 学会等名 日本応用数理学会 2022年度年会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木 貴
2. 発表標題 領域変分固有値の微分可能性
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (グループ型) 自由境界問題に対する反復法の理論的および数値解析的研究
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木 貴
2. 発表標題 口トカボルテラ系の特異振動
3. 学会等名 RIMS 共同研究 (グループ型A) 非線形問題の精密解析
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 鈴木 貴
2. 発表標題 非線形楕円型固有値問題の解の爆発
3. 学会等名 日本数学会 2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 鈴木 貴
2. 発表標題 Minkowski 計量と非定常 Maxwell 方程式の界面消滅
3. 学会等名 日本数学会 2020年度秋季総合分科会 (オンライン)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 Takashi Suzuki	4. 発行年 2022年
2. 出版社 World Scientific	5. 総ページ数 688
3. 書名 Applied Analysis - Mathematics for Science, Technology, Engineering, third edition	

1. 著者名 Suzuki Takashi	4. 発行年 2020年
2. 出版社 De Gruyter	5. 総ページ数 490
3. 書名 Semilinear Elliptic Equations	

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>大阪大学 数理・データ科学教育研究センター (MMDS) 鈴木貴研究室  <a href="http://www-mmms.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/faculty/personal/suzuki/">http://www-mmms.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/faculty/personal/suzuki/</a></p>
---

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	高橋 亮  (Takahashi Ryo)  (30583249)	奈良教育大学・数学教育講座・准教授    (14601)	
研究分担者	三沢 正史  (Misawa Masashi)  (40242672)	熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・教授    (17401)	
研究分担者	佐藤 友彦  (Sato Tomohiko)  (50397676)	日本大学・生産工学部・准教授    (32665)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	宮西 吉久  (Miyanishi Yoshihisa)  (20740236)	信州大学・学術研究院理学系・准教授    (13601)	
研究分担者	太田家 健佑  (Ohtake Kensuke)  (30805859)	信州大学・全学教育センター・助教(特定雇用)    (13601)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	レンヌ師範大学			
英国	チェスター大学			
オーストリア	グラーツ工科大学			
ドイツ	マンハイム大学			