

令和 5 年 5 月 26 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19H01809

研究課題名（和文）テンソルネットワーク法の改良と古典・量子スピン系への応用

研究課題名（英文）Improvement of Tensor Network Method and its Application to Classical/Quantum Spin Systems

研究代表者

川島 直輝（Kawashima, Naoki）

東京大学・物性研究所・教授

研究者番号：30242093

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 12,700,000円

研究成果の概要（和文）：スピン系などの量子多体問題に対して、テンソルネットワークによる新しい表現を見出し、それに基づいて、新しい数値手法を開発した。これを応用して、いくつかの代表的な問題の物性解明を行った。たとえば、トポロジカル量子状態研究において標準的である2次元Kitaevモデルに対して我々が発見したテンソルネットワーク表現は、2次元古典統計力学で代表的であるループガスモデルと数学的に等価であることが分かった。さらにこれを応用した新しい計算手法を用いてKitaevモデルから派生した問題についても相図を求めた。とくに、 $\alpha$ -RuCl<sub>3</sub>などの化合物に対応したモデルにおいて、カイラススピン液体など多くの量子相を発見した。

研究成果の学術的意義や社会的意義  
スピン系は、その単純さにも関わらず、臨界現象やトポロジカル量子相など、多くの多体物理現象を示すため、現象の本質を理解する上で重要である。このため、スピン系の特徴を調べるための多くの数値計算手法がこれまでに考案されてきたが、扱える系の大きさや精度の点で不満足な点が多かった。これを克服するために本研究課題において我々はテンソルネットワーク表現に基づく量子統計力学研究のための新しい数値計算手法を開発し、いくつかの典型的な問題にたいして適用して成果を挙げた。とくに、テンソルネットワーク法の一般の情報処理への展開についても新しい展望が開けたことは社会的な展開にもつながる成果である。

研究成果の概要（英文）：Based on a new representation by tensor networks, we have developed new numerical methods for quantum many-body problems such as spin systems. For example, the tensor network representation we discovered for the two-dimensional Kitaev model, which is standard in topological quantum state studies, turned out mathematically equivalent to the loop gas model, one of the standard classical models in statistical mechanics. This representation can be used in developing numerical methods, which was applied to obtain phase diagrams for problems derived from the Kitaev model. In particular, we have discovered many quantum phases in models corresponding to compounds such as  $\alpha$ -RuCl<sub>3</sub>.

研究分野：数物系科学

キーワード：統計力学 計算物理学 量子スピン系 テンソルネットワーク

## 1. 研究開始当初の背景

古典・量子多体問題の研究においてフラストレーションや粒子の統計性に起因する「負符号問題」の存在が大規模な計算を阻んできていた。これは、計算の対象となる有限系のサイズの関数として指数関数的に計算量が爆発する問題であり、厳密対角化法も同様の計算量の指数関数爆発があるという意味では問題点を共有している。逆に、この問題の解決は物性物理学における一般のフェルミオン問題やトポロジカル量子相の解明、素粒子物理学における QCD 相図の完成など、多くの大問題の解決につながるものと期待され、長年多くの研究がなされてきていたが、一般的な処方箋は得られていなかった。これに対して、TN 表現に基づく古典統計力学モデルの解法や、量子多体問題の基底状態計算法は、指数関数的な計算量爆発を持っておらず、実際にも多くの事例で、従来法に比べて高い精度の計算を実現することに成功しているところから、注目を集めつつあった。量子系に限ると、一般的な量子状態を多項式時間内に計算する手法が存在しないことはファインマンによって指摘されているが、それにもかかわらず、TN 法が成功している理由は、通常我々の関心の対象となる系が、実は一般的な量子状態でなく、有限次元で定義され比較的弱いエンタングルメントしか持たないこと、すなわち、いわゆるエンタングルメントの「面積則」を満たしていることにある。この事情は量子系のエンタングルメントエントロピーを相互情報量に置き換えると古典系の計算でも同様であった。

## 2. 研究の目的

テンソルネットワーク(以下 TN と略記)の考え方が計算物理、数理物理、情報処理、機械学習など様々な分野で注目されてきており、それぞれの分野において、新しい種々の計算手法が提案されている。本研究課題は、TN を利用して、多次元データからその特徴を効率的に抽出することのできる表現とその計算手法の確立を目指したものであり、とくに TN 表現の新しい最適化手法の開発とその物性理論への応用を目的としている。実際、TN 表現に基づく多くの手法において、表現の最適化問題が本質的な困難として存在することが明瞭に意識されるようになってきている。本研究では、TN による効率的な多次元データ表現とその実用的な計算手法の確立を出発点とし、それを利用した数値繰り込み群や量子多体系計算手法の本質的な改良や、より一般的な多次元データから特徴量を抽出するための計算アルゴリズムを提案した。さらに、得られた新しい手法を応用して、キタエフモデルから派生した量子多体問題やカゴメ格子反強磁性体など、基礎的でありながら基本的物性に関してさまざまな議論のあるモデルや、結晶場異方性が本質的な役割を持った磁性体など従来の計算手法では大規模計算が不可能であった物理系の物性を明らかにすることを目的とした。

物理学においては、従来法で計算不可能であった量子多体系の高精度計算に成功している TN 法だが、応用数学においても、画像情報などの多次元データからの特徴抽出などに関して TN 表現の有用性を示す研究事例も増えている。これらは、多様な分野において計算科学的手法が進展してきた結果、特徴抽出あるいは情報圧縮が共通のキーワードとして浮かびあがってきたことに対応している。これらの研究事例はおおよそ、多次元データからその特徴をより効率的に抽出することのできるコンパクトな表現は何か、という問いに対する解答を目指したものである。本研究課題は、TN 表現に重点を置いて、この問いに答えることを目指すものである。

## 3. 研究の方法

TN を応用した計算手法の改良が進む一方で、TN 表現に基づく多くの手法で共通に存在する表現の最適化問題が本質的な困難としてより明瞭に認識されるようになってきている。ごく最近、申請者のグループはそのような困難の典型例として「エンタングルメントループ」に起因した局所安定状態があることを指摘し、同時にその解決のためのアイデアを公表した。本研究では、TN による効率的な多次元データ表現とその実用的な計算手法の確立を出発点とし、それを利用した数値繰り込み群や量子多体系計算手法の本質的な改良を行った。さらに、得られた新しい手法を応用して、キタエフモデルやカゴメ格子反強磁性体など、基礎的でありながら基本的物性に関してさまざまな議論のあるモデルや、結晶場異方性が本質的な役割を持った磁性体など、従来の計算手法では大規模計算が不可能であった物理系の物性を明らかにした。具体的には、以下のようなサブテーマを追求することを通じて上記の目的を達成することとした。

- (A) 最適リング表現の効率的計算手法の確立
- (B) リング表現を応用した繰り込み群法の開発とその応用
- (C) 新しい繰り込み群法を応用した 3 次元系の固定点代数とテンソル構造の関係の解明
- (D) リング表現を応用した画像情報の特徴抽出法の提案
- (E) キタエフモデルとその関連モデル(「低ランク」量子液体状態)
- (F) カゴメ格子の物理(磁化曲線、フェルミオン系)
- (G) 強い結晶場のある磁性体。

## 4. 研究成果

- (1) 主な成果の概要

高階の情報量の大きいテンソルを多数の3階テンソルからなる環状ネットワークによって高効率に表現するためのアルゴリズムを提案した。ベンチマーク計算の結果、臨界現象に対する有効性が立証された。[01]

境界をもった統計力学系に対する TN 表現実空間繰り込み群の手法を開発した。これによって表面臨界現象の研究が可能となる。2次元古典スピン系に適用した結果、イジング、3重臨界イジング、3状態ポッツモデルなどの表面臨界現象に一致する境界共形スペクトルを得ることに成功した。[02]

TN 表現を動的臨界現象において標準的である  $1 + 1$  次元向き付きパーコレーション問題に応用した。我々は、従来法では計算が困難であるレーニエントロピーを計算し、その緩和が転移点において普遍的な性質を持つことを明らかにした。[03]

TN 表現に基づく変分法によって、キタエフモデルの研究を行った。我々は簡単な TN 表現を持つ量子状態で、キタエフスピン液体状態と多くの共通点を持つものを発見した。2つの量子状態は互いに断熱的に変形可能である。我々の発見した量子状態は古典ループガスモデルと等価な数学的構造を持っており、変分法の出発点としても有用であることが示された。[04]

キタエフモデルと同様の物性を示すことが期待されている、 $-RuCl_3$  などの物質に磁場をかけたときに生じる量子液体相の研究を行った。我々の計算は、ジグザグ磁気秩序相と磁場による完全分極相との間にスピン液体相が出現することを示唆するものである。[05]

スピン1のキタエフスピン液体に対してテンソルネットワーク法による変分計算を行い、これまでスピン液体状態の存在が示唆されながらその性質が未解明だった量子相について、トポロジカルエンタングルメントエントロピーを計算することによって、この相が、 $Z_2$  ゲージ構造と可換な準粒子励起を持つトポロジカルスピン液体であることを見出した。[06]

スピン1のハイゼンベルク鎖に対して、変分パラメータが少ないにも関わらず、非常に精度の高い基底状態エネルギーが得られる変分波動関数をテンソルネットワークの一種である MPS 状態を利用して構成した。[07]

キタエフスピン液体が実現する可能性のある現実の物質として、 $-RuCl_3$  が提案されているが、この物質の量子スピンモデル系に対して、磁場中の相図をテンソルネットワーク法によって調べた。この結果、先行研究ですでに示唆されていたカイラルスピン液体を含む多数の相が見いだされた。カイラススピン液体相については、先行研究よりも狭い領域でしか実現していないことも分かった。[08]

HOTRG 法はテンソルネットワーク表現に基づく実空間繰り込み法として標準的に利用される方法だが、その精度を上げるには途中で用いられる射影演算子の最適化において大局的な環境の影響を取り入れることが重要である。しかし、計算コストが重いことが問題であった。我々は、角転送行列の方法を応用することによって、この計算コストを大幅に削減することに成功した。[09]

1次元はしご型量子スピン系 (JQ モデル) において、テンソルネットワーク法に基づいて、脱閉じ込め転移の研究を行った。4つの相が一点で交わる相図が得られた。[10] (7) カゴメ反強磁性体であるカドミウムカペラサイトに対して熱的量子ホール効果の計算を行った。[11]

テンソルネットワーク (TN) によるモデルの表現は実空間繰り込み群の手続きを行う上でも有用であることは、High-order tensor renormalization group (HOTRG) 法の成功などによって広く知られているが、最終的に臨界指数などの普遍パラメータを求めるには、スケール普遍テンソルをテンソル繰り込み群の方法で求めてそこから転送行列を作った後、2次元共形場理論 (CFT) との比較から導かれる転送行列固有値とスケーリング次元の関係をj用いて評価を行ってきた。この従来法は3次元以上への拡張が知られておらず、3次元以上の系で普遍パラメータを求めるには種々の相関関数や応答関数を具体的に計算して有限サイズスケーリングを適用するなど、スケール普遍テンソルを求めることのできる TN の利点が生かされて来なかった。我々はスケール普遍テンソルから、繰り込み群の操作そのものを表現する超演算子を構成し、その固有値からスケーリング次元を求める方法を考案した。この方法は CFT の知見には依存していないため、原理的には3次元以上にも適用可能である。2次元イジングモデルに対するベンチマークの結果、我々の方法で精度良くスケーリング次元を求めることができることがわかり、3次元 CFT 研究への足がかりを与える方法が得られた。[12]

これまで TN 法は量子系計算において基底状態計算に利用されてきたが、励起状態計算のための手法は知られていなかった。我々はテンソルネットワーク法に基づいて、マグノンやスピノンなどの素励起のスペクトルを計算する手法を提案した。[13]

はしご状の格子で定義された4体相互作用のある  $S=1/2$  XXZ モデルについて、variational uniform matrix product state (VUMPS) の方法などを応用して、その相図を明らかにした。このモデルは脱閉じ込め転移を示すことで知られる2次元 JQ モデルの1次元版とみなすことができる。特に、我々はこのはしごモデルが磁気秩序状態から VBS 状態への連続転移を示すことを見出した。また、相図全体は、磁気秩序相、ハルデー相、VBS 相などを含む8つの異なる相からなることを明らかにした。[14]

[01] のテンソル型データのテンソルリングによる分解は、本研究の内容が物理学にとどまらず、広く情報科学的なインパクトも持ちうるものであることを示しており、また国内外においても類似の研究はなく高いオリジナリティを持つものである。

[08] では、キタエフスピン液体を実現しうる物質として大きな関心が持たれている系に対しても、低いボンド次元のテンソルネットワーク表現が有用であることを示し、同時にスピン液体状態を含む相図を確立したのものとして大きなインパクトを持っている。

[09] では、従来は数値計算で直接的に立証されたことのなかったポッツモデルの非常に弱い1次相転移を世界で始めて直接計算によって、その1次転移性を立証しており、統計力学的観点から大きなインパクトを持っている。

[12] は、テンソルネットワーク表現による実空間くりこみ群の計算から有限サイズスケリングを経ること無しに、かつ2次元で利用したような共形場理論に頼ることもなく、直接スケリング次元の情報を得る方法を確立したが、これは3次元以上の高次元の系に対する実空間くりこみ群の手続きを完成させる上で必須の要素であり、これを発展させて3次元臨界現象に対して、その代数的構造を明らかにする一歩となるものである。

### (3) 今後の展望

今回の研究課題においては、当初計画していた3次元臨界現象の十分な解明までは至らなかったが、そのための重要なステップを完成することができた。今後の研究によって、これを完成することで計算統計力学を更に発展させたい。

テンソルネットワークの非一様系に対する応用は、さまざまな試みがなされているものの、まだ十分に成功した例はない。今後の研究によって、テンソルネットワークの構造を動的に最適化することによって、スピングラスなどの未解決の難問が解決される可能性があると考えている。

テンソルネットワークの一般の情報処理については、今回の研究課題においても一定の成果を上げることができたが、まだ実際のデータ処理における成功事例の創出にまでは至っていない。今後の研究を通じて、標準的ベンチマークデータ処理問題に対する性能の高い方法を開発し、実データの処理にまでつなげてゆきたい。

### <引用文献>

[01] Hyun-Yong Lee, and Naoki Kawashima: "Tensor-Ring Decomposition with Index-Splitting", Journal of the Physical Society of Japan 89, 054003(1-9) (2020)

[02] Shumpei Iino, Satoshi Morita, and Naoki Kawashima: "Boundary Tensor Renormalization Group", Physical Review B 100, 035449(1-8) (2019)

[03] Kenji Harada and Naoki Kawashima: "Entropy Governed by the Absorbing State of Directed Percolation", Physical Review Letters 123, 090601 (2019)

[04] Hyun-Yong Lee, Ryui Kaneko, Tsuyoshi Okubo, Naoki Kawashima: "Abelian and non-Abelian chiral spin liquids in a compact tensor network representation", Physical Review B 101, 035140(1-9) (2020)

[05] Li Ern Chern, Ryui Kaneko, Hyun-Yong Lee, and Yong Baek Kim: "Magnetic field induced competing phases in spin-orbital entangled Kitaev magnets", Phys. Rev. Research 2, 013014(1-9) (2020)

[06] Hyun-Yong Lee, Naoki Kawashima and Yong Baek Kim: "Tensor network wave function of S=1 Kitaev spin liquids", Physical Review Research 2, 033318(1-6) (2020)

[07] Jintae Kim, Minsoo Kim, Naoki Kawashima, Jung Hoon Han and Hyun-Yong Lee: "Construction of variational matrix product states for the Heisenberg spin-1 chain", Physical Review B 102, 085117(1-8) (2020)

[08] Hyun-Yong Lee, Ryui Kaneko, Li Ern Chern, Tsuyoshi Okubo, Youhei Yamaji, Naoki Kawashima & Yong Baek Kim: "Magnetic field induced quantum phases in a tensor network study of Kitaev magnets", Nature Communications 11, 1639(1-7) (2020)

[09] Satoshi Morita and Naoki Kawashima: "Global optimization of tensor renormalization group using the corner transfer matrix", Physical Review B 103, 045131 (1-6) (2021)

[10] Takuhiro Ogino, Ryui Kaneko, Satoshi Morita, Shunsuke Furukawa, Naoki Kawashima: "Continuous phase transition between Neel and valence bond solid phases in a J-Q-like spin ladder system", Physical Review B 103, 085117(1-14) (2021)

[11] Masatoshi Akazawa, Masaaki Shimosawa, Shunichiro Kittaka, Toshiro Sakakibara, Ryutaro Okuma, Zenji Hiroi, Hyun-Yong Lee, Naoki Kawashima, Jung Hoon Han and Minoru Yamashita: "Thermal Hall Effects of Spins and Phonons in Kagome Antiferromagnet Cd-Kapellasite", Physical Review X 10, 041059 (1-14) (2020)

[12] Xinliang Lyu, Ruqing G. Xu, and Naoki Kawashima: "Scaling dimensions from

linearized tensor renormalization group transformations Physical Review Research 3, 023048(1-16) (2021)

[13] Wei-Lin Tu, Huan-Kuang Wu, Norbert Schuch, Naoki Kawashima, and Ji-Yao Chen: "Generating function for tensor network diagrammatic summation", Physical Review B 103, 205155(1-6) (2021)

[14] Takuhiro Ogino, Shunsuke Furukawa, Ryui Kaneko, Satoshi Morita, and Naoki Kawashima: "Symmetry-protected topological phases and competing orders in a spin- 1/2 XXZ ladder with a four-spin interaction", Physical Review B 104, 075135(1-16) (2021)

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計25件（うち査読付論文 25件 / うち国際共著 14件 / うちオープンアクセス 6件）

1. 著者名 Masaki-Kato Akiko, Motoyama Yuichi, Kawashima Naoki	4. 巻 91
2. 論文標題 Universal and Non-Universal Correction Terms of Bose Gases in Dilute Region: A Quantum Monte Carlo Study	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 024001 (1-5)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.91.024001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Ogino Takuhiro, Furukawa Shunsuke, Kaneko Ryui, Morita Satoshi, Kawashima Naoki	4. 巻 104
2. 論文標題 Symmetry-protected topological phases and competing orders in a spin-1/2	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 075135(1-16)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.104.075135	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Katsura Hoshio, Kawashima Naoki, Morita Satoshi, Tanaka Akinori, Tasaki Hal	4. 巻 3
2. 論文標題 Mott-insulator-like Bose-Einstein condensation in a tight-binding system of interacting bosons with a flat band	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review Research	6. 最初と最後の頁 033190(1-12)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevResearch.3.033190	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Lee Hyun-Yong, Suzuki Takafumi, Kim Yong Baek, Kawashima Naoki	4. 巻 104
2. 論文標題 Anisotropy as a diagnostic test for distinct tensor-network wave functions of integer- and half-integer-spin Kitaev quantum spin liquids	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 024417(1-10)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.104.024417	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Tu Wei-Lin、Wu Huan-Kuang、Schuch Norbert、Kawashima Naoki、Chen Ji-Yao	4. 巻 103
2. 論文標題 Generating function for tensor network diagrammatic summation	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 205155(1-6)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.103.205155	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Lyu Xinliang、Xu RuQing G.、Kawashima Naoki	4. 巻 3
2. 論文標題 Scaling dimensions from linearized tensor renormalization group transformations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review Research	6. 最初と最後の頁 023048(1-16)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevResearch.3.023048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Motoyama Yuichi、Yoshimi Kazuyoshi、Masaki-Kato Akiko、Kato Takeo、Kawashima Naoki	4. 巻 264
2. 論文標題 DSQSS: Discrete Space Quantum Systems Solver	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Computer Physics Communications	6. 最初と最後の頁 107944(1-9)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cpc.2021.107944	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kohshiro Hidehiko、Kaneko Ryui、Morita Satoshi、Katsura Hoshio、Kawashima Naoki	4. 巻 104
2. 論文標題 Multiple magnetization plateaus induced by further neighbor interactions in an S=1 two-leg Heisenberg spin ladder	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 214409(1-8)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.104.214409	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lyu Xinliang, Xu RuQing G., Kawashima Naoki	4. 巻 3
2. 論文標題 Scaling dimensions from linearized tensor renormalization group transformations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review Research	6. 最初と最後の頁 023048(1-16)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevResearch.3.023048	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Motoyama Yuichi, Yoshimi Kazuyoshi, Masaki-Kato Akiko, Kato Takeo, Kawashima Naoki	4. 巻 264
2. 論文標題 DSQSS: Discrete Space Quantum Systems Solver	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Computer Physics Communications	6. 最初と最後の頁 107944(1-9)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cpc.2021.107944	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ogino Takuhiro, Kaneko Ryui, Morita Satoshi, Furukawa Shunsuke, Kawashima Naoki	4. 巻 103
2. 論文標題 Continuous phase transition between Neel and valence bond solid phases in a JQ-like spin ladder system	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 085117(1-14)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.103.085117	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Harashima Yosuke, Tamai Keiichi, Doi Shotaro, Matsumoto Munehisa, Akai Hisazumi, Kawashima Naoki, Ito Masaaki, Sakuma Noritsugu, Kato Akira, Shoji Tetsuya, Miyake Takashi	4. 巻 5
2. 論文標題 Data assimilation method for experimental and first-principles data: Finite-temperature magnetization of $(\text{Nd,Pr,La,Ce})_2(\text{Fe,Co,Ni})_{14}\text{B}$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review Materials	6. 最初と最後の頁 013806(1-10)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevMaterials.5.013806	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -



1. 著者名 Akazawa Masatoshi, Shimozawa Masaaki, Kittaka Shunichiro, Sakakibara Toshiro, Okuma Ryutarō, Hiroi Zenji, Lee Hyun-Yong, Kawashima Naoki, Han Jung Hoon, Yamashita Minoru	4. 巻 10
2. 論文標題 Thermal Hall Effects of Spins and Phonons in Kagome Antiferromagnet Cd-Kapellasite	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review X	6. 最初と最後の頁 041059 (1-14)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevX.10.041059	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Morita Satoshi, Kawashima Naoki	4. 巻 103
2. 論文標題 Global optimization of tensor renormalization group using the corner transfer matrix	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 045131 (1-6)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.103.045131	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kim Jintae, Kim Minsoo, Kawashima Naoki, Han Jung Hoon, Lee Hyun-Yong	4. 巻 102
2. 論文標題 Construction of variational matrix product states for the Heisenberg spin-1 chain	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 085117(1-8)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.102.085117	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hoshi Takeo, Kawamura Mitsuaki, Yoshimi Kazuyoshi, Motoyama Yuichi, Misawa Takahiro, Yamaji Youhei, Todo Syngē, Kawashima Naoki, Sogabe Tomohiro	4. 巻 258
2. 論文標題 K - Open-source library for the shifted Krylov subspace method of the form $(zI-H)x=b$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Computer Physics Communications	6. 最初と最後の頁 107536(1-10)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.cpc.2020.107536	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lee Hyun-Yong, Kawashima Naoki, Kim Yong Baek	4. 巻 2
2. 論文標題 Tensor network wave function of S=1 Kitaev spin liquids	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review Research	6. 最初と最後の頁 033318(1-6)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevResearch.2.033318	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Iino Shumpei, Morita Satoshi, Kawashima Naoki	4. 巻 101
2. 論文標題 Boundary conformal spectrum and surface critical behavior of classical spin systems: A tensor network renormalization study	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 155418(1-12)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.101.155418	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lee Hyun-Yong, Kaneko Ryui, Chern Li Ern, Okubo Tsuyoshi, Yamaji Youhei, Kawashima Naoki, Kim Yong Baek	4. 巻 11
2. 論文標題 Magnetic field induced quantum phases in a tensor network study of Kitaev magnets	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nature Communications	6. 最初と最後の頁 1639(1-7)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1038/s41467-020-15320-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Lee Hyun-Yong, Kawashima Naoki	4. 巻 89
2. 論文標題 Tensor-Ring Decomposition with Index-Splitting	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Physical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 054003(1-9)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7566/JPSJ.89.054003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Lee Hyun-Yong, Kaneko Ryui, Okubo Tsuyoshi, Kawashima Naoki	4. 巻 101
2. 論文標題 Abelian and non-Abelian chiral spin liquids in a compact tensor network representation	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 035140(1-9)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.101.035140	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yamashita Minoru, Akazawa Masatoshi, Shimozaawa Masaaki, Shibauchi Takasada, Matsuda Yuji, Ishikawa Hajime, Yajima Takeshi, Hiroi Zenji, Oda Migaku, Yoshida Hiroyuki, Lee Hyun-Yong, Han Jung Hoon, Kawashima Naoki	4. 巻 32
2. 論文標題 Thermal-transport studies of Kagome antiferromagnets	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics: Condensed Matter	6. 最初と最後の頁 074001(1-11)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1361-648x/ab50e9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Harada Kenji, Kawashima Naoki	4. 巻 123
2. 論文標題 Entropy Governed by the Absorbing State of Directed Percolation	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review Letters	6. 最初と最後の頁 090601(1-5)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevLett.123.090601	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Lee Hyun-Yong, Kaneko Ryui, Okubo Tsuyoshi, Kawashima Naoki	4. 巻 123
2. 論文標題 Gapless Kitaev Spin Liquid to Classical String Gas through Tensor Networks	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review Letters	6. 最初と最後の頁 087203(1-6)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevLett.123.087203	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Iino Shumpei, Morita Satoshi, Kawashima Naoki	4. 巻 100
2. 論文標題 Boundary tensor renormalization group	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Physical Review B	6. 最初と最後の頁 035449(1-8)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1103/PhysRevB.100.035449	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計44件 (うち招待講演 11件 / うち国際学会 13件)

1. 発表者名 渡辺宙志, 森田悟史, 本山裕一, 川島直輝
2. 発表標題 ポッツ対称性を持つスピン系のピンダー比の振る舞いと臨界指数
3. 学会等名 日本物理学会 2021年秋季大会年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 森田悟史, Hyunyong Lee, Kedar DamleB, 川島直輝
2. 発表標題 2次元古典ダイマー模型におけるAshkin-Teller型相転移
3. 学会等名 日本物理学会 2021年秋季大会年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 幸城秀彦, 金子隆威, 森田悟史, 桂法称, 川島直輝
2. 発表標題 多重磁化プラトールを実現するフラストレートスピンラダー系の厳密解
3. 学会等名 日本物理学会 2021年秋季大会年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoki Kawashima
2. 発表標題 How to carry out the generic real-space renormalization group program
3. 学会等名 CCP2021 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoki Kawashima
2. 発表標題 Classically representable quantum states
3. 学会等名 International workshop on tensor networks in many body and lattice field (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Wei-Lin Tu, Huan-Kuang Wu, Takafumi Suzuki, Hyunyong Lee, and Naoki Kawashima
2. 発表標題 Competing scenarios for dipolar hard-core bosons within square and triangular lattices
3. 学会等名 APS March Meeting (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Takuhiro Ogino, Ryui Kaneko, Satoshi Morita, Shunsuke Furukawa, and Naoki Kawashima
2. 発表標題 Continuous phase transition between Neel and valence bond solid phases on a spin ladder system
3. 学会等名 APS March Meeting (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Xinliang Lyu, RuQing Xu, Naoki Kawashima
2. 発表標題 Scaling dimensions from analyzing tensor renormalization group flows
3. 学会等名 日本物理学会第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 飯野隼平, 川島直輝
2. 発表標題 3次元0(N)模型の表面臨界現象について」
3. 学会等名 日本物理学会第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 荻野卓啓, 金子隆威, 森田悟史, 古川俊輔, 川島直輝
2. 発表標題 四体相互作用を含むスピン1/2XXZ梯子系における秩序相と対称性によって保護されたトポロジカル相
3. 学会等名 日本物理学会第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 玉井敬一, 川島直輝
2. 発表標題 吸収状態転移を示す系におけるエントロピー生成の数値計算
3. 学会等名 日本物理学会第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 杜章霖, Huan-Kuang Wu, Norbert Schuch, 川島直輝, Ji-Yao Chen
2. 発表標題 生成関数によるテンソルネットワークの和の計算方法
3. 学会等名 日本物理学会第76回年次大会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoki Kawashima
2. 発表標題 Recent Progress in Tensor Network Methods
3. 学会等名 34th Annual CSP Workshop: Recent Developments in Computer Simulation Studies in Condensed Matter Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Naoki Kawashima
2. 発表標題 Constructing Linearized Superoperator from HOTRG
3. 学会等名 Benasque Workshop: Entanglement in Strongly Correlated Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 荻野卓啓, 金子隆威, 森田悟史, 川島直輝, 古川俊輔
2. 発表標題 スピンラダー系におけるNeeI-VBS連続相転移の数値的検証2
3. 学会等名 日本物理学会2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 本山裕一, 大久保毅, 森田悟史, 吉見一慶, 加藤岳生, 川島直輝
2. 発表標題 二次元量子格子系テンソルネットワークソルバーパッケージ TeNeS
3. 学会等名 日本物理学会2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 森田悟史, 川島直輝
2. 発表標題 角転送行列を用いたテンソルくりこみ群の大域的最適化
3. 学会等名 日本物理学会2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大久保毅, 川島直輝
2. 発表標題 エンタングルメントエントロピーを用いたテンソルリング分解の最適化
3. 学会等名 日本物理学会2020年秋季大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 幸城秀彦, 金子隆威, 川島直輝
2. 発表標題 S=1 スピンラダー-BIP-TEN0における新奇磁化プラト-の理論的解明
3. 学会等名 日本物理学会2020年秋季大会
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 森田悟史, 川島直輝
2. 発表標題 角転送行列を用いたテンソルくりこみ群の改良
3. 学会等名 日本物理学会 第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 飯野隼平, 森田悟史, 川島直輝
2. 発表標題 境界のある系のTensor Network Renormalization
3. 学会等名 日本物理学会 第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 渡辺宙志, 本山裕一, 森田悟史, 川島直輝
2. 発表標題 ポッツ模型におけるBinder比の非単調な振る舞いについて
3. 学会等名 日本物理学会 第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 金子隆威, 大久保毅, 川島直輝
2. 発表標題 テンソルネットワーク手法を用いたハニカム格子上のHeisenberg- 模型の基底状態探索
3. 学会等名 日本物理学会 第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 玉井 敬一、川島 直輝
2. 発表標題 吸収状態転移の情報流れダイナミクス
3. 学会等名 日本物理学会 第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 荻野卓啓, 金子隆威, 森田悟史, 川島直輝
2. 発表標題 スピンラダー系におけるNeel-VBS連続相転移の数値的検証
3. 学会等名 日本物理学会 第75回年次大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ogino Takuhiro, Ryui Kaneko, Satoshi Morita, Naoki Kawashima
2. 発表標題 Numerical evidence for a continuous phase transition between Neel and valence bond solid phases on a spin-ladder system
3. 学会等名 APS March Meeting (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 金子 隆威、大久保 毅、H.-Y. Lee、山地 洋平、川島 直輝
2. 発表標題 テンソルネットワーク計算によるKitaevスピン液体の研究
3. 学会等名 ポスト「京」重点課題(7)・萌芽的課題成果報告会 第9回材料系ワークショップ
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 川島直輝
2. 発表標題 テンソルネットワーク法による量子格子系の解法とその周辺
3. 学会等名 シミュレーションによる宇宙の基本法則と進化の解明に向けて (QUCS2019) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Kawashima
2. 発表標題 Understanding Kitaev-Related Models through Tensor Networks
3. 学会等名 Tensor Network States: Algorithms and Applications (TNSAA2019-2020) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 金子 隆威、大久保 毅、H.-Y. Lee、山地 洋平、川島 直輝
2. 発表標題 テンソルネットワーク法を用いた拡張Kitaev模型の基底状態探索
3. 学会等名 第13回物性科学領域横断研究会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川島直輝
2. 発表標題 テンソル分解 物理計算とデータ科学の接点
3. 学会等名 モビリティ基盤数理の研究 (Step2) 合同課題検討会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 玉井 敬一、川島 直輝
2. 発表標題 結合写像格子系における巨視的ダイナミクスのテンソルネットワークを用いた記述
3. 学会等名 計算物質科学人材育成コンソーシアム (PCoMS) シンポジウム & 計算物質科学スーパーコンピュータ事業報告会 2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Kaneko, T. Okubo, H.-Y. Lee, Y. Yamaji, and N. Kawashima
2. 発表標題 Tensor Network Study of the Stability of the Kitaev Spin Liquid
3. 学会等名 International Conference on Strongly Correlated Electron Systems (SCES2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 金子 隆威、大久保 毅、山地 洋平、川島 直輝
2. 発表標題 テンソルネットワーク手法を用いたKitaev- 模型のスピン液体の解析
3. 学会等名 日本物理学会 2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H.-Y. Lee, R. Kaneko, T. Okubo, and N. Kawashima
2. 発表標題 Kitaev Spin Liquids in a Compact Tensor Network Representation
3. 学会等名 日本物理学会 2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 飯野隼平, 森田悟史, 川島直輝
2. 発表標題 境界のある系のテンソルくりこみ群
3. 学会等名 日本物理学会 2019年秋季大会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川島直輝
2. 発表標題 サブ課題Dの全体概要と体制
3. 学会等名 第3回ポスト「京」萌芽的課題「基礎科学の挑戦」・「極限マテリアル」合同公開シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 川島直輝
2. 発表標題 テンソルネットワーク法によるデータ圧縮と量子物性の新しい理解
3. 学会等名 第3回ポスト「京」萌芽的課題「基礎科学の挑戦」・「極限マテリアル」合同公開シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 玉井 敬一、川島 直輝、川勝 年洋、野口 博司
2. 発表標題 マルチスケールシミュレーション高速化に向けた大自由度力学系における情報圧縮技術の開発
3. 学会等名 第3回ポスト「京」萌芽的課題「基礎科学の挑戦」・「極限マテリアル」合同公開シンポジウム
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Kawashima
2. 発表標題 Introduction
3. 学会等名 Computational Approaches to Quantum Many-body Problems (CAQMP2019) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Kaneko, T. Okubo, H.-Y. Lee, Y. Yamaji, and N. Kawashima
2. 発表標題 Tensor network study of the Kitaev spin liquid
3. 学会等名 Frontiers of Statistical Physics (FSP2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Kawashima
2. 発表標題 Tensor Network States for Lattice Systems
3. 学会等名 International Conference on Frontiers of Correlated Electron Sciences (FCES2019) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 R. Kaneko, T. Okubo, H.-Y. Lee, Y. Yamaji, and N. Kawashima
2. 発表標題 Tensor network approach to the Kitaev spin liquid
3. 学会等名 International Conference on Frontiers of Correlated Electron Sciences (FCES19) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 金子 隆威、大久保 毅、H.-Y. Lee、山地 洋平、川島 直輝
2. 発表標題 Searching for the Kitaev spin liquid by the tensor network approach
3. 学会等名 物性研究所スパコン共同利用・CCMS合同研究会「計算物質科学の新展開」
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>東京大学物性研究所川島研究室ホームページ  <a href="https://kawashima.issp.u-tokyo.ac.jp/ja/">https://kawashima.issp.u-tokyo.ac.jp/ja/</a></p>
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	森田 悟史  (Morita Satoshi)	東京大学・物性研究所・助教  (12601)	現職：慶應義塾大学理工学研究科特任准教授
研究協力者	杜 韋霖  (Tu Wei-Lin)	東京大学・物性研究所・特任研究員  (12601)	
研究協力者	吉見 一慶  (Kazuyoshi Yoshimi)	東京大学・物性研究所・特任研究員  (12601)	

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	本山 裕一 (Motoyama Yuichi)	東京大学・物性研究所・学術専門職員  (12601)	
研究協力者	飯野 隼平 (Iino Shumpei)	東京大学・物性研究所・大学院生  (12601)	
研究協力者	幸城 秀彦 (Kohshiro Hidehiko)	東京大学・物性研究所・大学院生  (12601)	
研究協力者	荻野 卓啓 (Ogino Takuhiro)	東京大学・物性研究所・大学院生  (12601)	
研究協力者	呂 欣亮 (Lyu Xinliang)	東京大学・物性研究所・大学院生  (12601)	

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
韓国	Korea University		
オーストリア	University of Vienna		
カナダ	University of Toronto		
ドイツ	Max-Planck-Institut, Garching		