

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19H02373

研究課題名(和文) 錐最適化における半正定値錐の多面錐近似の理論の構築とその応用

研究課題名(英文) Construction of theory of polyhedral approximation of the semi-definite cone in conic optimization and its applications

研究代表者

吉瀬 章子 (Yoshise, Akiko)

筑波大学・システム情報系・教授

研究者番号：50234472

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,200,000円

研究成果の概要(和文)：線形計画法と半正定値計画法を含む錐最適化モデルは、21世紀の重要な最適化モデルとして世界的に認知されている。本研究では、二次割当問題のような困難な問題に対処できる能力を付与することを研究対象としている。研究の鍵となるのは、我々が開発した半正定値基底の詳細な検討と、その拡張によって形成される凸多面体錐の探索である。半正定値錐の凸多面体錐近似に関する理論を構築し、錐最適化手法の実用化を促進することを目的としている。この実現のため、多面体錐近似に関する理論的性質を導き出し、計算機実験を通してこれらの近似の計算効率と精度を評価した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究では半正定値錐の近似に関する新しい研究成果として、優対角行列錐とスケール優対角行列錐による近似の効率性を評価するため、新しい指標であるトレース正規化距離を提案している。既存研究で用いられていた距離を用いた近似評価に比べて、提案した距離による評価は、より精度が高く、上記の行列集合の近似効率性を区別するのに有効であることを理論的に示した。これらの結果は学術誌Optimization Lettersに掲載されるなど、学術的な意義がある。また、より堅牢で高速な最適化アルゴリズムが求められる錐最適化分野での計算効率性の改善と、実社会での問題への応用にも貢献するなど、社会的にも意義がある。

研究成果の概要(英文)：The conic optimization model, which includes linear and semidefinite programming, is recognized globally as a significant optimization model for the 21st century. This study explicitly targets its capability to address complex problems such as the quadratic assignment problem. Key to the research is the detailed examination of the semidefinite bases we developed and the exploration of convex polyhedral cones formed through their extensions. The main objective is to formulate a theory on convex polyhedral cone approximation of semidefinite cones to enhance the practical application of conic optimization methods. Theoretical properties are derived and tested through computer experiments to evaluate these approximations' computational efficiency and accuracy.

研究分野：数理最適化

キーワード：錐最適化 半正定値最適化 多面体錐近似 優対角行列錐 トレース正規化距離

1. 研究開始当初の背景

「錐最適化モデル」に関しては多くの研究が行われており、2010年までの成果については研究代表者も1章を執筆している995ページの著書[1]に網羅的にまとめられている。著書のタイトルが示すように、対称半正定値行列すべてからなる「半正定値錐 (semidefinite cone)」は錐最適化において最も重要な錐の1つである。以下では、簡単な例でこの錐の有用性を紹介する。

変数 c が0あるいは1の値を取る条件は、非凸制約「 $c(c-1)=0$ 」で与えられる。この制約は変数 b を導入した「 $b=c^2, b-c=1$ 」と等価である。非凸制約「 $b=c^2$ 」を凸制約「 $b \leq c^2$ 」に緩和し、 $X = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ とおけば、緩和した制約「 $b \leq c^2$ 」は、 $a=1$ である対称行列 X が半正定値行列である条件と等価になる。上記の緩和では変数 c の非負性は保証されないが、 X の要素がすべて非負である条件を加えれば、変数 c の非負性も保証され、緩和はより強力になる。

半正定値かつ要素がすべて非負の行列からなる集合は「二重非負錐」と呼ばれる。図1, 2は、 2×2 対称行列を構成する3つの要素 a, b, c を軸としたときの、「半正定値錐 (図1)」、「二重非負値錐 (図2)」である。共に曲面を含む凸錐という特徴を持つ。

上述の0-1整数緩和の議論は、 n 変数の問題に対しても拡張可能である。論文[2]では、この議論に基づき、困難な0-1整数計画問題の代表的な例である2次割当問題に対して錐最適化緩和を行い計算機実験を行っている。図3は、各問題の最適値を100%としたときの、半正定値緩和の精度、二重非負値緩和の精度(主問題(primal)、双対問題(dual))を示した結果である。いずれの問題においても二重非負値緩和により、95%以上の下界値が得られており、半正定値錐を用いた錐最適化モデルの問題記述能力の高さを示している。

半正定値錐を用いた錐最適化モデルは、困難な数理最適化問題の精度の高い緩和モデルを与えるが、計算効率では課題がある。半正定値計画問題に対しては数値的に安定したソルバーが開発されているが、一般に半正定値計画問題のソルバーは極めて多くの計算資源を必要とする。点数20の2次割当問題でも6400万次元の巨大な半正定値計画問題となり通常のPCでは計算できないことから、上述の論文[2]ではスパコン上で実験を行っている。錐最適化緩和モデルの精度は高いが、社会実装のためにはさらなる計算上の工夫が必要である。

研究代表者らはこの困難を打開するため、論文[3]において、新たなツール「半正定値基」を提案し、半正定値錐を凸多面体近似する手法を開発した。「半正定値基」は、図1の半正定値錐の境界上に存在する基底(互いに1次独立で空間を貼る要素)であり、最も基本的な基底は、図4の円上の3点である。図4の三角錐はこの3点で二重非負値錐を近似したものである。図4の半正定値基を回転すれば別の基底が得られ、図5の五角錐のように、さらに近似精度が高まる。

二重非負値錐を平面で囲まれた凸多面体として近似するメリットは、線形計画問題として問題を定式化できることである。表1は、半正定値最適化ソルバーを用いた場合の半正定値緩和、二重非負値緩和と、研究代表者が提案する半正定値基を用いた凸多面体近似を用いた場合の、1反復あたりの計算量を示したものである。半正定値基の選び方で計算量を抑えられる可能性があり、論文[3]でもその有効性を示している。半正定値錐の凸多面体近似について、計算効率と近似精度の双方から、その限界を見極めたいと考えた。

[1] M. F. Anjos and J. B. Lasserre Eds., *Handbook on Semidefinite, Conic and Polynomial Optimization*, International Series in Operations Research & Management Science, Springer (2012). (研究代表者は12章を執筆)

[2] A. Yoshise and Y. Matsukawa, "On optimization over the doubly nonnegative cone," 2010 IEEE International Symposium on Computer-Aided Control System Design, Yokohama, Japan, 2010, pp. 13-18, doi: 10.1109/CACSD.2010.5612811.

[3] A. Tanaka and A. Yoshise, "LP-based tractable subcones of the semidefinite plus nonnegative cone," *Annals of Operations Research* 265(2018)155-182. doi.org/10.1007/s10479-017-2720-z

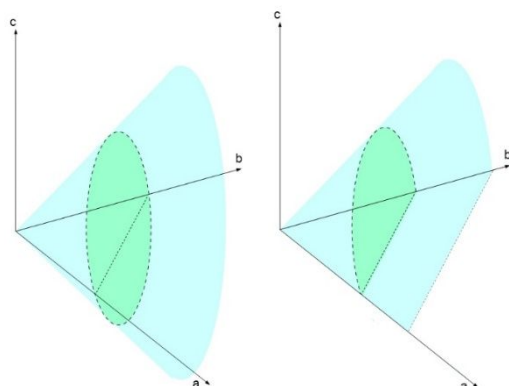


図1:半正定値錐 図2:二重非負値錐

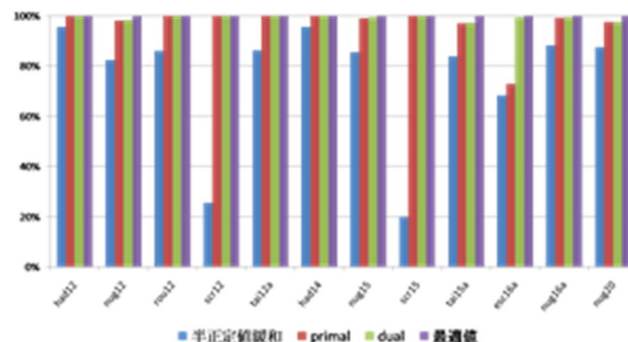


図3:2次割当問題に対する二重非負値緩和の精度
12題すべての例題で95%以上の下界値が得られた

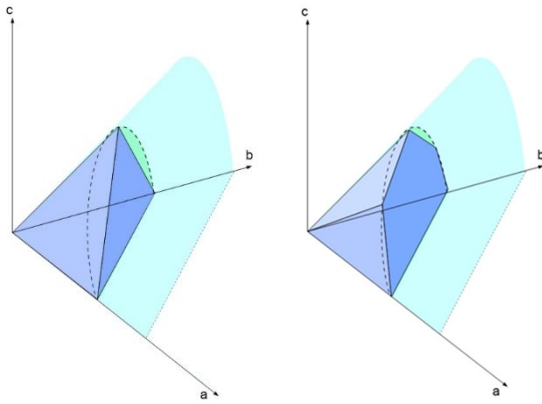


図 4：半正定値基による二重非負値錐近似 1

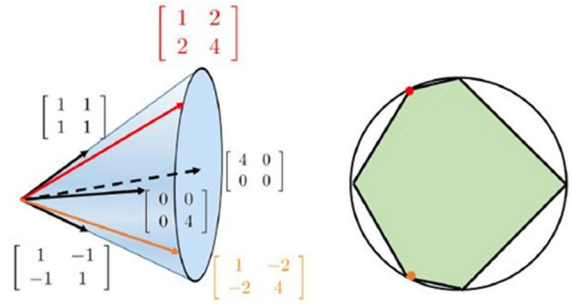


図 5：半正定値基による二重非負値錐近似 2

図 6：半正定値基による多面体近似の新たな拡張

表 1 (0-1 変数 n 個を仮定)	(既存手法) 半正定値緩和	(既存手法) 二重非負値緩和	k 個の半正定値基 による凸多面錐近似
緩和モデルの解を求める解法	半正定値最適化問題に対する内点法	半正定値最適化問題に対する内点法	線形計画問題に対する単体法・内点法
変数の数	$O(n^2)$	$O(n^4)$	$O(kn^2)$
解法 1 反復の計算量	$O(n^6)$	$O(n^{12})$	$O(k^3n^6)$

2. 研究の目的

本研究の目的は、半正定値錐の凸多面錐近似について、計算効率と近似精度の双方から、その限界を見極めることにあり、理論的性質の導出と計算機実験を繰り返すことにより、半正定値錐の凸多面錐近似に関する独自の理論を構築することにある。数学的な理論に留まらず、錐最適化の社会実装を意識した、計算効率の議論と検証を重視した理論構築を目指す。

3. 研究の方法

本研究の特徴は、研究代表者らが初めて定義した、半正定値基に基づき、半正定値錐の凸多面錐近似を定義している点にある。以下では「半正定値基」の定義を述べ、その性質が直観的に理解可能であること、さらに多様な発展可能性があることを示す。

ベクトル $e_i \in \mathbb{R}^n (i=1,2,\dots,n)$ を第 i 単位ベクトルとし、対称半正定値行列 $E_{ij} = (e_i + e_j)(e_i + e_j)^T (1 \leq i, j \leq n)$ を定義する。例えば $n=3$ の場合以下の 6 行列が得られる。

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, E_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$i \neq j$ である要素は 6 つの行列にただ 1 度しか現れないことを考慮すれば、これらは、 3×3 対称行列が作る 6 次元空間の 1 次独立な行列であり、すなわち基底を与えている。さらにこの性質は、1 次独立な n 個のベクトル $p_i \in \mathbb{R}^n (i=1,2,\dots,n)$ に対しても容易に拡張できる。研究代表者らの論文 [3] では対称半正定値行列 $P_{ij} = (p_i + p_j)(p_i + p_j)^T (1 \leq i, j \leq n)$ を「半正定値基」と呼んでいる。

研究代表者らは「挑戦的研究 (萌芽)」研究で、この半正定値基の性質と有効性を検証している。その過程で、現在半正定値基は多様に作ることができるが、計算機実験の結果から、行列の疎性が計算効率に大きく影響することがわかった。上記の単位ベクトルに基づく半正定値基は 0 の要素が多く疎であるが、これを回転させてしまうと疎性が失われる。疎性を失わずに新たな半正定値基を導出する方法として、研究代表者らは、「ベクトルの重みづけ」が有効であることを発見し、[4]においてこの発想に基づく半正定値基の生成と計算機実験結果の発表を行った。「ベクトルの重みづけ」とはパラメータ α を加えた半正定値行列 $P_{ij}(\alpha) = (p_i + \alpha p_j)(p_i + \alpha p_j)^T (1 \leq i, j \leq n)$ であり、図 6 は、 $p_i = e_i, \alpha = 2$ として得られた新たな行列 () を、半正定値錐とその断面上に示したものである。

本研究ではこの重みづけによって得られる行列集合を精査することにより、その凸包がスケ

ーリングされた優対角行列錐と一致することを示すなど、半正定値基とそれに基づく半正定値錐の凸多面体近似に関して新規性の高い成果を導くことができた。

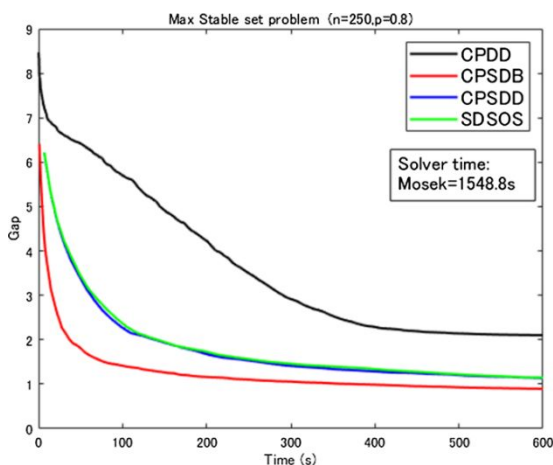
[4] Y. Wang and A. Yoshise, Acceleration of the Lagrangian-DNN method for a class of QOPs, 23rd International Symposium on Mathematical Programming, Bordeaux, France, July 1-6, 2018.

4. 研究成果

以下では本研究における代表的な成果を、研究実績の論文[5],[6]に基づき述べる。

論文[5]では、半正定値錐の一連の疎な多面体近似を構築する技術を開発した。上述の論文[3]で提案された半正定値基に基づき、半正定値基を構成する行列のスパース性を保つように、半正定値基の簡単な拡張を提案した。そして以下の理論的な性質があることを理論的に示した。

1. 半正定値基を用いた多面体近似は、優対角行列すべてからなる集合を含み、スケーリングされた優対角行列すべてからなる集合に含まれる。
2. 半正定値基を直交行列で線形変換した行列すべてからなる集合の凸包含は半正定値錐を与える。
3. 拡張半正定値基からなる行列集合の凸包はスケーリングされた優対角行列錐に一致する。



以上の結果を錐最適化問題に対して適用し、提案手法の有効性を計算機実験により検証した。

具体的には最大安定集合問題の半正定値緩和を取り上げ、これを解くための切断平面法における初期近似として、優対角行列錐を用いる方法 (CPDD)、スケーリングされた優対角行列錐を用いる方法 (CPSDD) と、提案した拡張半正定値基に基づく近似錐を用いる方法 (CPSDB) を比較したところ、図7が示すように、提案手法が最も効率的であるとの結果が得られた。

図7：最大安定集合問題の半正定値緩和に対する計算機実験結果

さらに論文[6]では、Blekherman ら[7]によって提案されたノルム正規化距離を基に、提案した凸多面近似錐の精度を定量的に示すための新たな距離である「トレース正規化距離」を提案し、その距離に基づく各近似錐の精度を理論的に導出した。

Blekherman ら[7]の距離は、 $n \times n$ 半正定値錐 S_+^n と集合 S との距離 $dist_F(S, S_+^n)$ を

$$dist_F(S, S_+^n) = \sup_{X \in S, \|X\|_F=1} \|X - P_{S_+^n}(X)\|_F$$

(ただし、 $P_{S_+^n}(X)$ は X の S_+^n への射影)で定めるが、提案した距離 $dist_T(S, S_+^n)$ は

$$dist_T(S, S_+^n) = \sup_{X \in S, Tr(X)=1} \|X - P_{S_+^n}(X)\|_F$$

で与えられる。ノルムで制限するよりトレースで制限した方が、 X が含まれる領域が広くなり、集合間の微細な距離の違いが計量しやすくなる。実際、距離 $dist_F(S, S_+^n)$ を用いた場合、優対角行列錐 DD と、スケーリングされた優対角行列錐 SDD との距離は、

$$dist_F(DD, S_+^n) = dist_F(SDD, S_+^n) = \frac{n-2}{n}$$

と、同じ距離で与えられるが、提案した距離 $dist_T(S, S_+^n)$ を用いれば、

$$dist_T(DD, S_+^n) = \frac{\sqrt{n}-2}{n}, \quad dist_T(SDD, S_+^n) = \frac{n-2}{n}$$

と異なる値で評価できることを理論的に証明した。

2024年5月時点のGoogle Scholarにおいて、論文[5]は10編の論文に、論文[6]は2編の論文にそれぞれ引用されており、学術的な意義のある成果が得られたと考えている。

- [5] Y. Wang, A. Tanaka, and A. Yoshise, "Polyhedral approximations of the semidefinite cone and their application." *Computational Optimization and Applications* 78, 893–913 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10589-020-00255-2>
- [6] Y. Wang, and A. Yoshise, "Evaluating approximations of the semidefinite cone with trace normalized distance." *Optimization Letters* 17, 917–934 (2023). <https://doi.org/10.1007/s11590-022-01908-3>
- [7] G. Blekherman, S. S. Dey, M. Molinaro, and S. Shengding, "Sparse PSD approximation of the PSD cone." *Mathematical Programming*. 191, 981–1004 (2022). <https://doi.org/10.1007/s10107-020-01578-y>

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計14件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 Yuzhu Wang, Akihiro Tanaka, Akiko Yoshise	4. 巻 78
2. 論文標題 Polyhedral approximations of the semidefinite cone and their application	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Computational Optimization and Applications	6. 最初と最後の頁 893-913
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10589-020-00255-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Kai Zhang, Yuichi Takano, Yuzhu Wang, Akiko Yoshise	4. 巻 9
2. 論文標題 Optimizing the strategic decisions for one-way station-based carsharing systems: A mean-CVaR approach	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 IEEE Access	6. 最初と最後の頁 79816-79828
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/ACCESS.2021.3084287	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Shin-ichi Kanoh, Akiko Yoshise	4. 巻 2110.09854
2. 論文標題 A New Extension of Chubanov's Method to Symmetric Cones	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv preprint arXiv:2110.09854	6. 最初と最後の頁 1-44
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.48550/arXiv.2110.09854	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 Yuzhu Wang, Akiko Yoshise	4. 巻 2105.13579
2. 論文標題 Evaluating approximations of the semidefinite cone with trace normalized distance	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv preprint	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.48550/arXiv.2105.13579	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sin-ichi Kanoh and Akiko Yoshise	4. 巻 11
2. 論文標題 Centering ADMM for the Semidefinite Relaxation of the QAP	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of NACA-ICOTA2019	6. 最初と最後の頁 197-213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kai Zhang, Yuichi Takano, Yuzhu Wang and Akiko Yoshise	4. 巻 9
2. 論文標題 Optimizing the strategic decisions for one-way station-based carsharing systems: A mean-CVaR approach	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 IEEE Access	6. 最初と最後の頁 79816-79828
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1109/ACCESS.2021.3084287	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuzhu Wang, Akihiro Tanaka and Akiko Yoshise	4. 巻 78
2. 論文標題 Polyhedral approximations of the semidefinite cone and their application	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Computational Optimization and Applications	6. 最初と最後の頁 893-913
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10589-020-00255-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Zhijian Lai and Akiko Yoshise	4. 巻 arXiv:2107.01538
2. 論文標題 Completely Positive Factorization in Orthogonality Optimization via Smoothing Method	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv preprint	6. 最初と最後の頁 1-18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Shin-ichi Kanoh and Akiko Yoshise	4. 巻 arXiv:2110.09854
2. 論文標題 A New Extension of Chubanov's Method to Symmetric Cones	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv preprint	6. 最初と最後の頁 1-47
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Zhijian Lai and Akiko Yoshise	4. 巻 arXiv:2203.09762
2. 論文標題 Superlinear and Quadratic Convergence of Riemannian Interior Point Methods	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 arXiv preprint	6. 最初と最後の頁 1-34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yuzhu Wang; Akihiro Tanaka; Akiko Yoshise	4. 巻 78
2. 論文標題 Polyhedral approximations of the semidefinite cone and their application	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Computational Optimization and Applications	6. 最初と最後の頁 893-913
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10589-020-00255-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 加納伸一; 吉瀬章子	4. 巻 428
2. 論文標題 QAPの半正定値緩和問題を解くためのセンタリングADMM	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究レポート「最適化：モデリングとアルゴリズム」	6. 最初と最後の頁 114-129
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 汪 玉柱; 吉瀬 章子	4. 巻 428
2. 論文標題 SD基に基づく半正定値行列錐の凸多面錐近似	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 統計数理研究所共同研究リポート「最適化：モデリングとアルゴリズム」	6. 最初と最後の頁 106-113
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kano Shin-ichi; Yoshise Akiko	4. 巻 1359
2. 論文標題 Centering ADMM for the Semidefinite Relaxation of the QAP	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discussion Paper Series, Department of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba	6. 最初と最後の頁 1-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 10件)

1. 発表者名 Lai ZhiJian; Yoshise Akiko
2. 発表標題 Completely Positive Factorization via Orthogonality Constrained Problem
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization (OP21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kano Shin-ichi; Yoshise Akiko
2. 発表標題 An Extension of Roos's Improved Version of Chubanov's Method to the Feasibility Problem over the Symmetric Cone
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization (OP21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 大沼悠人; 吉瀬 章子
2. 発表標題 2車種混合によるバス時刻表最適化問題の計算技術
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季発表会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 頼志堅; 吉瀬 章子
2. 発表標題 Superlinear and Quadratic Convergence of Riemannian Interior Point Methods
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季発表会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Zhang Kai; Wang Yuzhu; 高野祐一; Yoshise Akiko
2. 発表標題 Scenario-Based CVaR Approach for Strategic Decision Support in One-Way Carsharing Systems
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization (OP21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 加納伸一; 吉瀬 章子
2. 発表標題 改良Chubanov法の対称錐最適化への拡張
3. 学会等名 研究集会「数理最適化の理論・アルゴリズム・応用」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 頼志堅; 吉瀬 章子
2. 発表標題 完全正值行列の判定問題に関する新手法の提案
3. 学会等名 研究集会「数理最適化の理論・アルゴリズム・応用」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 頼志堅; 吉瀬 章子
2. 発表標題 Superlinear and Quadratic Convergence of Riemannian Interior Point Methods
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季発表会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大沼悠人; 吉瀬 章子
2. 発表標題 2車種混合によるバス時刻表最適化問題の計算技術
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会春季発表会2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kai Zhang and Akiko Yoshise
2. 発表標題 Scenario-Based CVaR Approach for Strategic Decision Support in One-Way Carsharing Systems
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization (OP21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shin-ichi Kanoh and Akiko Yoshise
2. 発表標題 An Extension of Roos's Improved Version of Chubanov's Method to the Feasibility Problem over the Symmetric Cone
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization (OP21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 ZhiJian Lai and Akiko Yoshise
2. 発表標題 Completely Positive Factorization via Orthogonality Constrained Problem
3. 学会等名 SIAM Conference on Optimization (OP21) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 汪 玉柱; 吉瀬 章子
2. 発表標題 SD基に基づく半正定値行列錐の凸多面錐近似
3. 学会等名 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季発表会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Wang Yuzhu; Kanoh Shinichi; Yoshise Akiko
2. 発表標題 Two approaches for solving hard conic optimization problems
3. 学会等名 NACA-ICOTA2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Wang Yuzhu; Tanaka Akihiro; Yoshise Akiko
2. 発表標題 Polyhedral approximations of the semidefinite cone and their applications
3. 学会等名 NACA- ICOTA2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shinichi Kanoh; Akiko Yoshise
2. 発表標題 A centering ADMM for SDP and its application to QAP
3. 学会等名 ICCOPT 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yuzhu Wang; Akihiro Tanaka; Akiko Yoshise ICCOPT 2019/2019-08-05--2019-08-08
2. 発表標題 Polyhedral Approximations of the Semidefinite Cone and Their Applications
3. 学会等名 ICCOPT 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	八森 正泰 (Hachimori Masayasu) (00344862)	筑波大学・システム情報系・准教授 (12102)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	佐野 良夫 (Sano Yoshio) (20650261)	筑波大学・システム情報系・准教授 (12102)	
研究分担者	繁野 麻衣子 (Shigeno Maiko) (40272687)	筑波大学・システム情報系・教授 (12102)	
研究分担者	高野 祐一 (Takano Yuichi) (40602959)	筑波大学・システム情報系・准教授 (12102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関