

令和 6 年 6 月 7 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K01590

研究課題名（和文）多変量実数積分過程におけるセミパラメトリックな推測理論の構築とその応用

研究課題名（英文）Semiparametric inference for multivariate fractional processes and its applications

研究代表者

生川 雅紀（Narukawa, Masaki）

岡山大学・社会文化科学学域・准教授

研究者番号：30588489

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では潜在的に非定常な多変量時系列において実数積分パラメータと実数共積分を同時にセミパラメトリック推定する方法として効率的テイパーを取り入れた局所的な最小2乗法と多変量局所Whittle法を組み合わせた2段階アプローチを提案した。さらに実数共積分の存在を調べるためにハウスマンタイプの検定統計量を同様の局所Whittle尤度から構築した。推定量や検定統計量の漸近的性質を導出することに加え、有限標本におけるそれらの性能を数値シミュレーションによって確認した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多変量時系列解析において実数共積分分析は有用かつ魅力的な手法の一つであるが、強弱双方の実数共積分関係や一般的な変数数を想定した既存研究は少ない上にほとんどが制約的な側面を有している状況下で、単一方程式モデルに基づいているものの計算負荷が比較的抑えられ効率性も保ちつつ安定したセミパラメトリック推測を行ううえの有用性の高い頑健なアプローチを提案している本研究はこの分析に新たな進展をもたらすと考えられる。

研究成果の概要（英文）：In this research, we proposed a two-step approach to semiparametrically estimate fractional cointegration with the fractionally integrated parameters in potentially nonstationary multivariate time series by combining the narrow-band least squares method and the multivariate local Whittle method with the efficient tapering incorporated. Furthermore, a Hausman-type test statistic was constructed from the multivariate local Whittle likelihood to detect the existence of fractional cointegration. In addition to deriving the asymptotic properties of the estimators and the test statistic, their finite sample performance was investigated by numerical simulation.

研究分野：計量経済学

キーワード：実数積分過程 多変量時系列 セミパラメトリック推定 Taper 共積分

## 1. 研究開始当初の背景

時系列データは観測される時間方向の相関構造によって特徴付けられるが、実数と分過程は和分次数を表す実数と分パラメータによってその挙動が規定されており、実数を取ることで多様な時間相関の持続性、幅広く利用されている自己回帰移動平均モデルを含む短期記憶のみならず、定常長期記憶や非定常長期記憶の広範にわたる性質を有する系列を描写できるとされている。とりわけ、変数の相互関係を捉えられる多変量時系列に対しては、各系列がいわゆる単位根過程に従う下での共和分分析が主に経済学における長期均衡概念とも相まって精力的に研究されて来たが、実数と分の観点からは単位根過程は非定常長期記憶過程の特殊ケースとも見なせるため、時系列間のより精緻な情報を引き出せる実数共和分分析は一般化された非常に有用性の高いアプローチと捉えられ、2000年代以降その推測理論は大きな進展を遂げて来ている。

このように多変量実数と分過程では時系列の特性を描写する実数と分パラメータのみならず、それらの長期相互関係の分析も主要な関心対象となり、(実数)共和分分析は多変量時系列解析における最も有益な手法の1つとなっている。時間領域・周波数領域の双方にてパラメトリック・セミパラメトリックモデリングに基づく多様なアプローチが存在しているものの、対象が2変量や定常か非定常過程のみと限定的である、複数段階推定を始めとして数値計算上複雑な側面を有するなどそのほとんどが実用上の困難を伴っており、とくに3変量以上の一般的な場合において決定的な方法が確立されているとは言い難く、停滞感も否めない状況であると言える。他方において、実際のデータ分析を行う上で実数と分過程でないにも関わらず例えば平均シフトに起因する時間相関の持続性などから見誤ってしまう見せかけの(疑似)長期記憶性が多い研究で指摘されており、このような現象が生じている場合にはこれまでの統計的推測は妥当性を損ない実証分析における統計的根拠が崩壊しかねないといった困難な問題も抱えてしまう。

## 2. 研究の目的

以上のような背景から導かれる本研究課題の目的は定常・非定常の多変量実数と分過程を同時に扱え、柔軟なモデリングに対応できるセミパラメトリックな推測理論の枠組みで実数と分パラメータのみならず実数共和分分析や疑似長期記憶性を取り扱える実用性も重視した体系的な方法の確立を主とし、さらに現実に観測される経済データ等へと応用した実証分析を試みることである。その要となるのが周波数領域における最も効率的な Taper を用いた多変量へと拡張された局所 Whittle 法であり、原点近傍の局所的なスペクトル密度の挙動のみを利用することで定式化の誤りを回避でき、かつ、対象系列への(整数)差分操作から生じる過剰差分によるバイアスを計算負荷が低いことで知られる Tapering をピリオドグラムに施して取り除くのみならずシフト不変性を有する最大効率 Taper を利用することでそれに伴う推定量の漸近分散増大が劇的に抑えられる上に差分に応じた多項式トレンドが存在しても影響を受けないため、潜在的な非定常性を含む広範な実数共和分過程に対して既存の分析方法と遜色ない高い効率性と頑健性を有することが期待できる。

このような計算負荷も比較的に低減させられた一般的な非定常過程も扱える多変量セミパラメトリック法に基づいて実数共和分分析や疑似長期記憶性に対応できる実数と分過程の推測理論へと展開させて行き、本研究で構築して来た方法をマクロ経済やファイナンスにおける長期関係の実証分析へと応用し新たな知見を見出すことを目指す。

## 3. 研究の方法

実数と分過程において最大効率 Taper を組み込んだピリオドグラムに基づく多変量局所 Whittle 法によって潜在的に非定常な各系列の実数と分パラメータをセミパラメトリックに推測する方法をまず確立させることになるが、実数共和分関係が時系列間に存在する場合にはランク落ちが生じるためにそのまま直接適用することはできず、いわゆる共和分ベクトルに関しては推定することもできない。そこで、本研究では実数共和分関係が単一方程式モデルによって表現されていると想定し、それに対して適当な整数差分をとることで上記の多変量局所 Whittle 法の利点を生かして定常・非定常のいずれに実数共和分が存在する場合も関連するパラメータの統計的推測が扱えるアプローチを検討する。差分次数のとり方を駆使することで幅広い非定常長期記憶過程を扱うために、単一方程式モデルの左辺となる変数と誤差項の各実数と分パラメータの大小関係、つまり、その差が  $1/2$  よりも大きい小さいかによって実数共和分を強い・弱いに分類することができ、単位根過程に基づく通常の共和分は前者の特殊ケースとして含まれることになるが、差分をとったモデルに応じて適切に変換された系列を作ることで、Taper を用いた多変量局所 Whittle 法に実数共和分関係を取り込めると考えられるので、スペクトル密度に比較的緩い条件しか必要としない柔軟なモデリングに対応でき、広範な実数と分パラメータと共和分ベクトルの同時セミパラメトリック推定が行える上に強弱どちらの実数共和分の場合であっても事前制約なしに包括的に扱え、さらには差分操作と効率的 Taper の有する不変性から特定の加法的トレンドに対しても頑健な推定量が得られうるが見込める。

上記方法は実数共和分関係の存在が前提となるが、実際には観測されるデータから調べる必要がある。多変量の次元に応じて実数共和分は存在しうるが、実用上の観点からは経済理論等によって分析対象となる(実数)共和分関係が導かれることが大抵であり、単一方程式の関係があるかどうかの検証で十分な場合が大半を占める。そこで本研究では、実装が容易で扱いやすいハウスマン検定の考え方に則った実数共和分関係が存在するかどうかの仮説に対する検定統計

量の導出に取り組む。既存研究で提案されているアプローチを本研究の潜在的に非定常な実数  
和分過程の枠組みへ適用させ拡張を試みることになるが、実数共和分が存在しないとする帰無  
仮説の下では前述の Taper を用いた多変量局所 Whittle 法の方がその単変量版よりも実数  
和分パラメータの効率的な推定量が得られる点に着目し、それらを組み合わせることによって検定  
統計量の構築が期待できる。また、疑似長期記憶性を引き起こしうる(ランダムな)レベルシフト  
や平滑トレンドが低周波のスペクトル密度にその影響が表れる特性を利用して、同様の局所  
Whittle 尤度関数から検出するためのいわゆる最大スコア統計量を検討しさらに実数共和分関  
係が存在する場合へと展開して行く。以上の各推定量や検定統計量の漸近的な性質を導出す  
るとともに適宜数値シミュレーションによるパフォーマンス等を吟味し確認することも行う。

#### 4. 研究成果

##### (1) 効率的 Taper を用いた多変量局所 Whittle 法

潜在的に非定常な多変量実数分過程における実数分パラメータのセミパラメトリック推定  
アプローチとしてある程度見通しが立っていた最大効率 Taper を組み込んだ多変量局所 Whittle  
法に関して、推定量の一致性や漸近正規性といった理論的性質のみならず追加的な数値シミュ  
レーションによる単変量の同様な推定法との比較から本研究で提案している多変量法の方が平均  
二乗誤差の観点から実際にほとんどの設定においてより優れていることを示せた。既存研究  
で提案されている Taper を用いた多変量セミパラメトリック法よりも漸近的に効率的となりえ、  
また、効率的 Taper が定数に関して不変である性質から差分に応じた確定的な多項式トレンド  
の存在も許容する実数分パラメータのセミパラメトリック推定法を確立させることができた。  
さらに、補足的にパラメトリックモデリングに基づく同様の Taper を用いた Whittle 推定量に  
関する考察も行い、それによってもたらされる実数分パラメータのパラメトリック推定量は  
同様に漸近正規性を有し漸近分散が他のパラメータに依存する形になるものの定式化が適切で  
ある場合にはセミパラメトリックモデリングよりも収束速度が早くなりうると推測できるとい  
った予期していなかったことも分かり、以上の成果に関しては学術誌への掲載に至った。

##### (2) 強弱の実数共和分に対するセミパラメトリック推定

一般的な実数共和分を扱えるよう(1)の多変量局所 Whittle 法に単一方程式モデルで表現された  
実数共和分関係を取り込むために、まず、適切な整数差分が取られた共和分回帰に対応する共和  
分ベクトルを含む行列を考え、それを用いて変換された多変量差分系列に基づく局所 Whittle 尤  
度を構築した。このような操作によって言えば単一方程式モデルを非特異なシステムとして書  
き換え、多変量局所 Whittle 法の枠組みの下で定常か非定常かにかかわらず、また、強弱いづれ  
の実数共和分に対しても実数分パラメータと共和分ベクトルの同時セミパラメトリック推定  
を行うことができることが分かった。しかしながら、実装上の問題として、最小構成の2変量で  
あったとしても、目的関数である局所 Whittle 尤度の対象パラメータに関する最小化に際し、と  
くに共和分ベクトルの初期値に推定値の挙動が大きく依存し数値計算が非常に不安定となるこ  
とがシミュレーションから示唆され、また、これらのパラメータが異なる収束速度を持つと予想  
されたため、容易に計算できる共和分ベクトルの平均化ピリオドグラムを用いる局所的な最小2  
乗推定量に着目し第1段階として採用する2段階アプローチを考案するに至った。それに伴い  
当初の想定にはなかった潜在的に非常な実数分過程における共和分ベクトルの局所最小2乗法  
に最大効率 Taper を組み込んだセミパラメトリック推定量を構築し、平均化ピリオドグラムの  
累積スペクトル密度関数への確率収束とそれによって導かれる一致性を含む収束速度や局所的  
な外生性といった特定の条件が必要になるものの強弱いづれの実数共和分においても漸近正規  
性を有することのみならずその条件が満たされない場合には漸近的にバイアスが生じること  
も示した。単変量局所 Whittle 法による各実数分パラメータの推定量と組み合わせた第1段  
階を経ることで第2段階において上述の多変量局所 Whittle 法から対象となるパラメータの同  
時セミパラメトリック推定量が得られ、それらの漸近的性質についても導出した。その際に強い  
共和分のケースでは、技術的な側面から各段階で異なる増加速度のバンド幅を設定する必要や  
第2段階の多変量局所 Whittle 尤度に関して原点近傍から一定割合の低周波に対応する部分を  
省く修正を施さねばならず、とくに後者は漸近分散を増大させうるものの、実数分パラメータ  
差の境界となる範囲を除き漸近正規性を有することを示せた。以上に定常/非定常における強弱  
各実数共和分の設定下での数値シミュレーション結果を合わせ研究論文とすることができた。

##### (3) 潜在的な非定常過程を含むセミパラメトリックな実数共和分検定

実数分パラメータと共和分ベクトルのセミパラメトリック推定に際してそもそも実数共和分  
関係が存在するかどうかを観測される多変量時系列から診断する必要があるため、潜在的に非  
定常であったとしてもそれを許容できる(1)の成果を利用したハウスマンタイプの検定統計量を  
構築した。帰無仮説を実数共和分なしとするとき、その下では各系列に含まれる実数分パラメ  
ータに関して単変量局所 Whittle 法による推定量は(1)の多変量法と比較するといずれも一致性は  
あるものの前者の方が非効率的であることを利用し、実数分パラメータが共通であるとした  
多変量局所 Whittle 尤度とその推定量、また、単変量を用いた各推定量からなる平均を組み合わ  
せることで検定統計量が導け、帰無仮説の下で定常か非定常かにかかわらずカイ2乗分布に従  
うといった漸近的性質を示せた。さらに、実数分パラメータが共通であるとする関係が保たれ

ない場合にも用いられるいわゆる不等号関係に頑健と呼ばれる修正を施した統計量も同様に考えることができ、その漸近分布は影響を受けず変化しないことが分かった。数値シミュレーションの実施から、統計量のサイズや検出力はバンド幅や時系列間の相関に依存して変動し、予想通り過剰差分が生じているケースでは検出力が低下する傾向があるものの、比較的良好なパフォーマンスを有していることが確認できた。以上において帰無仮説は変量数に明示的には関係しないゆえ単純な 2 変量の枠組みでまず検討していたが、その際実数共和分が存在する 2 変量システムであれば、(2)の 2 段階目の同時推定と同様の効率的 Taper を用いた 2 変量局所 Whittle 法による実数共和分パラメータと共和分ベクトルの一致性を示すことができ、さらに漸近正規性・分散はその特殊ケースとして得られることも示せた。変量数に制約がかかり、同様に数値計算上の問題も垣間見えるが、ここでは推定量の効率性がやや低下することが予想されるものの局所 Whittle 尤度の低周波に対応する一定割合を除外することによって強弱いずれであるかの事前情報も必要としないセミパラメトリックなアプローチを提案できうることを併せて見出せた。

本研究課題で以上のように体系的に構築された最大効率 Taper を用いた実数共和分に対するセミパラメトリックな推測法は数値計算上も 2 段階アプローチではあるものの最小 2 乗法と局所 Whittle 法を組み合わせている点からも比較的負荷が抑えられ安定した効率的な推定値が得られうるのみならず、(2)で非定常過程における強い実数共和分へも対応するために低周波部分を一定割合削った局所 Whittle 尤度を導入することが疑似長期記憶性を取り除く対処に結び付けられるといった予想外の側面ももたらされていることに加え、(3)に関しては一般的な多変量の場合に逐次的な検定を行うことで共和分ランクの推定にも応用できうる拡張性を有しているセミパラメトリックな実数共和分検定であるため、高い実用性も備えた既存研究を凌ぎうる方法と言えよう。本研究の成果は実数共和分過程に従う多変量時系列の統計解析に新たなアプローチを提供し、実数共和分分析の方法論的発展と実証分析への応用に貢献するであろう。しかしながら、予定していなかった共和分ベクトルの局所的な最小 2 乗推定量やそれを用いた 2 段階アプローチ、付随する理論的整備を行う必要が生じ付加的となる新たな成果が得られた一方で、実数共和分パラメータと共和分ベクトルの同時セミパラメトリック推定を確立させることが想定以上に厳しくそちらに注力せざるを得ない状況となり、結果的に実際の経済やファイナンスデータへ応用した実証分析など当初計画の一部を十分推進させられていないことは否めず、加えて手間取っている成果のとりまとめもあり、これらに関しては今後の課題として取り組みたい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Narukawa, M	4. 巻 1-117
2. 論文標題 Tapered semiparametric estimation of fractional cointegration	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 岡山大学経済学会Discussion Paper	6. 最初と最後の頁 1-26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Narukawa, M	4. 巻 215
2. 論文標題 Efficient tapered local Whittle estimation of multivariate fractional processes	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Statistical Planning and Inference	6. 最初と最後の頁 234-256
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jspi.2021.03.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件（うち招待講演 0件/うち国際学会 0件）

1. 発表者名 生川雅紀
2. 発表標題 最大効率Taper を用いた実数共和分分析について
3. 学会等名 2022年度統計関連学会連合大会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 生川雅紀
2. 発表標題 因子モデルを用いた長期記憶時系列の推定
3. 学会等名 2019年度統計関連学会連合大会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------