

令和 4 年 6 月 1 日現在

機関番号：32612

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2021

課題番号：19K01592

研究課題名(和文) 金融市場における指値注文の発生過程に関するベイズ時系列分析

研究課題名(英文) Bayesian Time Series Analysis of Limit Order Processes in Financial Markets

研究代表者

中妻 照雄 (Nakatsuma, Teruo)

慶應義塾大学・経済学部(三田)・教授

研究者番号：90303049

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、金融市場における指値注文(売買価格を指定する注文)の発生メカニズムを説明するための新しいモデルとして、日中季節性と板情報(指値注文の価格と数量)を反映させたACD(Autoregressive Conditional Duration)モデルとSCD(Stochastic Conditional Duration)モデルの拡張を提案するとともに、提案モデルをマルコフ連鎖モンテカルロ法でベイズ推定するための新しい効率的アルゴリズムの開発を行なった。そして、提案モデルを東京証券取引所における売買注文の情報に適用し、市場の流動性を示す指標が指値注文の間隔に与える影響を検証した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究で新たに開発されたSCDモデルのベイズ推定ためのアルゴリズムは、先行研究で使用されてきた手法と比べて、(1)日中季節性の多項式近似を他のパラメータと同時に推定できる、(2)マルコフ連鎖モンテカルロ法のためのサンプリングを安定して実現できる、(3)継続時間の分布として推定が比較的容易である指数分布を仮定した場合のみならずガンマ分布やワイブル分布を仮定した場合でも安定的に推定できる、などという特徴を有する。この手法はSCDモデルと似た構造を持つSV(Stochastic Volatility)モデルにも適用できるため、計量ファイナンスの分野で幅広く応用されることが期待される。

研究成果の概要(英文)：In this study, as a model to explain the generating mechanism of limit orders (orders that specify the bid or ask price) in financial markets, we proposed an extension of the ACD (Autoregressive Conditional Duration) model as well as the SCD (Stochastic Conditional Duration) model in which intraday seasonality and limit order book information (the price and quantity of limit orders) are incorporated. We also developed a new efficient algorithm for Bayesian estimation of the proposed models via Markov chain Monte Carlo. We estimated the proposed models with the data of limit orders in the Tokyo Stock Exchange, and examined influences of indicators related to the market liquidity upon time intervals between limit orders.

研究分野：ベイズ統計学、計量経済学、計量ファイナンス

キーワード：金融高頻度データ 指値注文 継続時間モデル ベイズ統計学 マルコフ連鎖モンテカルロ法

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

高速取引 (High Frequency Trading, HFT) の普及に伴い、非常に短い間隔 (マイクロ秒単位あるいはそれ未満) で観測される指値注文の板情報 (売り注文と買い注文の時間、価格、数量など) を利用できる環境が整備されてきた。図 1 に仮想的な株式の板情報の例が示されている。例えば、図 1 で価格が 1,000 のところに買い数量が 76,000 とあるのは、1,000 円で買いたいという注文が 76,000 株出ていることを意味する。取引時間中には注文が次々として入ってくるため、板情報の売りと買いの数量は刻々と変化する。さらに売り注文と買い注文の価格と数量が一致することで取引が成立 (約定) すると、これらの注文は板情報から消える。このように図 1 のような板情報は取引時間を通してダイナミックに変化する。

しかし、板情報を使用した過去の先行研究では、データの制約や推定のための計算時間を節約するため、約定価格のみの時系列データを使用するものが多かった。高頻度データが整備された現在においても、一定間隔で計算した最良気配値 (図 1 では 1,000 が最良買い気配値で 1,050 が最良売り気配値) の加重平均 (対応する売り数量と買い数量をウエイトに使う) などが約定価格の代わりによく使われる。しかし、せっかく入手可能な板情報を恣意的に加工してしまうと、金融市場における資産価格形成に関する貴重な情報が失われる恐れがある。できれば板情報をそのままモデル化して資産価格形成メカニズムの解明を目指すべきであろう。この目的意識に基づいて、本研究では板情報の変化を記述するための新しい時系列モデルの開発を目指すことにした。

図 1 板情報の例

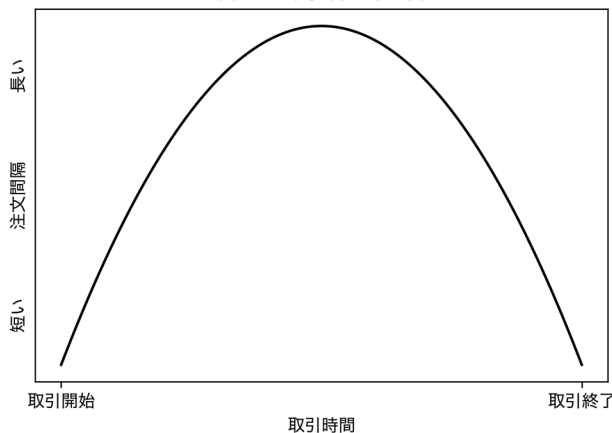
売り数量 (株数)	価格 (円)	買い数量 (株数)
31,000	1,200	
45,000	1,150	
60,000	1,100	
52,000	1,050	
	1,000	76,000
	950	68,000
	900	59,000
	850	47,000

2. 研究の目的

本研究では、板情報に新たに指値注文 (売買価格を指定する注文) が追加される時間の間隔に着目し、これをモデル化することを目指した。高頻度データにおける注文の記録には、売りか買いか、値はいくらかという情報に加えて、いつ注文が入ったか (タイムスタンプという) に関する情報が付加されている。これにより注文の間隔を計算することが可能である。金融市場における注文の間隔は不定期でランダムに変化するが、それらは決して独立ではなく、取引時間中には注文間隔の短くなる時間帯 (つまり注文が頻繁に入る時間帯) と長くなる時間帯 (注文が少ない時間帯) が続く傾向のあることが知られている。これは注文間隔の時系列データが自己相関を持つことを示唆する。このような注文間隔の特徴を表現できる離散時間の時系列モデルとして、Engle and Russel (1998) による ACD (Autoregressive Conditional Duration) モデルや Bauwens and Veredas (2004) による SCD (Stochastic Conditional Duration) モデルが知られている。

最も基本的な ACD/SCD モデルは注文間隔の定常性 (自己相関はあるものの無条件の期待間隔は一定である) を想定しているが、現実の注文間隔には取引時間を通して明確なトレンドが見られることが知られている。多くの金融市場において、取引が始まった直後は注文が活発に出されるため注文間隔は短くなる傾向がある。市場が閉まる直前も手仕舞いするための注文が盛んに行われるので同様に注文間隔は短くなる。しかし、取引時間の中ほど

図2 日中季節性の模式図



では注文が入ったり入らなかったりするため注文間隔は比較的長めになる。これを模式図として示すと図 2 のような逆 U 字型のカーブになる。このような 1 日の取引時間中に現れる周期的動きを「日中季節性」という。多くの先行研究では、日中季節性を「前処理」として注文間隔のデータから除去してから ACD/SCD モデルを適用することが行われてきた。しかし、この方法

では本来であればモデルの一部として推定されるべき日中季節性を決めるパラメータをモデル内の他のパラメータと別に推定してしまうため、モデルの整合性や推定の効率性の観点から望ましい方法とは言えない。本研究では日中季節性を明示的に注文間隔の時系列モデルに組み込んだ上でモデル内の他のパラメータと同時に推定することを試みた。

さらに本研究では現在の板情報が注文間隔に与える影響を検証するために、最良気配値での注文数量やスプレッド（売りと買いの最良気配値の差）などの情報を ACD/SCD モデルに組み込んだ拡張モデルを考えて実データに適用した。

### 3. 研究の方法

一般には時系列モデルを複雑にしていけばいくほどモデル推定の困難度は増す傾向がある。本研究で扱う ACD モデルでは対数尤度関数の計算が比較的容易であるため最尤法を適用できる。しかし、ACD モデルの対数尤度関数は非凹であるためパラメータの数が増えてくると最尤推定値の計算は困難になる。一方、SCD モデルにおいては尤度関数の評価が困難であるため（このためにはモデル内の状態変数に関する高次元の多重積分の評価が必要である）そもそも最尤法には向かないモデルである。

そこで本研究では複雑に拡張された ACD/SCD モデルをベイズ的アプローチで推定するとともに、WAIC などのベイズ的モデル選択基準などによって提案モデルと既存のモデルとの比較を行う。ベイズ推定を行うためにはパラメータの事後分布の評価が必須であるが、ACD/SCD モデルのような複雑な時系列モデルにおいて事後分布を直接評価することは困難であるため、マルコフ連鎖モンテカルロ (Markov chain Monte Carlo, MCMC) 法と呼ばれる数値計算技法を用いる。MCMC 法においては、マルコフ連鎖サンプリング法と呼ばれる手法でパラメータの事後分布から乱数を生成して人工的な標本を作成し、この標本の平均や中央値などを用いて数値的にパラメータの推定を行うことになる。MCMC 法を実行するためには乱数生成を効率的に行う必要があるため、提案モデルに適した新しい乱数生成アルゴリズムを開発した。

### 4. 研究成果

ACD モデルのベイズ推定には、Brownlees and Vannucci (2013) によるアルゴリズムを改良したものを使用した。Brownlees and Vannucci (2013) のアルゴリズムは Nakatsuma (2000) が ARMA-GARCH モデルのベイズ推定のために開発したマルコフ連鎖サンプリング法を ACD モデルに応用したものであり、日中季節性を B-スプラインで表現することでモデル内のパラメータとの同時推定を可能にしている（これを Brownlees and Vannucci (2013) は「Mixed ACD モデル」と呼んでいる）。本研究では、B-スプラインに加えてパースタイン多項式で日中季節性を近似する方法も試みた。いずれも直交基底関数の線形結合で連続関数を表現する手法であるが、パースタイン多項式は定義域が有界であることを明示的に取り入れた形になっており、株式市場のように日々の取引時間に限りがある場合に有効であると考えられる。

そして、板情報が注文間隔に与える影響を検証するため、最良気配値のスプレッドや注文数量などの流動性の指標を追加する拡張を ACD モデルに施した。B-スプラインやパースタイン多項式が基底関数の線形結合で表現されることから、流動性指標を線形回帰における説明変数に対応する形で追加することでモデルの拡張が容易にでき、サンプリングのアルゴリズムもほぼ同じものを流用できる。

一方、SCD モデルのベイズ推定のためのアルゴリズムとして Strickland et al. (2006) による方法が知られているが、本研究ではもっと効率的な方法の開発に成功した。本研究が提案するアルゴリズムは、Kastner and Frühwirth-Schnatter (2014) が AWOL (All WithOut a Loop) と呼ぶサンプリング手法に基づいている。AWOL ではモデル内の観測されない潜在変数を完全条件付き事後分布（潜在変数以外のパラメータを固定したときの事後分布）から同時に生成する。そのため逐次的に潜在変数を生成する従来の手法と比べてサンプリングの効率性が向上するという特徴を持つ。AWOL は Kastner and Frühwirth-Schnatter (2014) に先駆けて Chan and Jeliaskov (2009) や McCausland et al. (2011) によって状態空間モデル内の状態変数（これも観測されない潜在変数の一種である）に対して応用されているが、SCD モデルもまた非線形非正規状態空間モデルとして表現されることから、本研究では AWOL の適用が可能であると判断して SCD モデルへの応用を試みた。

しかし、オリジナルの AWOL は状態変数（潜在変数）を完全条件付き事後分布から生成できることを前提としているのに対し、SCD モデルでは状態変数の完全条件付き事後分布を厳密に求めることが困難である。そのため状態変数の生成には Metropolis-Hastings (MH) アルゴリズムに頼らなければならなくなる。時系列データが短く状態変数が少ない場合には直接 MH アルゴリズムを適用できるかもしれないが、高頻度データによる SCD モデルの推定では必然的に状態変数が膨大になるため、ナイーブな MH アルゴリズムを使っても採択率が低すぎて実用的ではない。そこで、本研究では Omori and Watanabe (2008) が提案したブロック・サンプラーを AWOL に組み合わせることで MH アルゴリズムの採択率を高めることを目指した。

さらに Kastner and Frühwirth-Schnatter (2014) にならって Yu and Meng (2011) が提案した ASIS (Ancillarity-Sufficiency Interweaving Strategy) を適用して状態変数のサンプリングの効率性を向上させる試みも行なった。結果として、この ASIS を使うことで SCD モデルの状態方程式の AR(1)係数の事前分布を一様分布に設定しても問題なくサンプリングを実行できるようになった。多くの先行研究ではサンプリングを安定化させるために AR(1)係数の事前分布にモードが 1 に近いタイトなベータ分布を想定することが通例となっているが、ASIS を適用すればフラットな事前分布を想定しても安定してサンプリングを実行できることを発見した。

SCD モデルに注文間隔における日中季節性を組み込む方法は ACD モデルとほぼ同じである。B-スプラインやバーンスタイン多項式で日中季節性を表現して SCD モデル内の他のパラメータと同時推定する。板情報における最良気配値のスプレッドや注文数量などの流動性の指標を SCD モデルに組み込む方法も ACD モデルの場合と変わらない。

以上説明した ACD/SCD モデルのベイズ推定のためのアルゴリズムの有効性を検証するため、ACD/SCD モデルから生成された人工データに適用し、推定されたモデルの妥当性やサンプリングの採択率などが実用に耐えうるものであることを確認した。続いて東京証券取引所における株式売買の銘柄別板情報の高頻度データを使用し、注文間隔の ACD/SCD モデルを推定して板情報における流動性の指標が注文間隔に与える影響について検証を行なった。推定結果がまとも次第、内容を精査して論文にまとめ学術誌に投稿する予定である。

なお SCD モデルのために開発した AWOL と ASIS を活用するマルコフ連鎖サンプリング法は従来手法よりも効率性の高いものであることが判明したため、このアルゴリズムを他の高頻度データの時系列モデルのベイズ推定に活用することも試みた。具体的には SCD モデルと似た構造を持つ SV (Stochastic Volatility) モデルに応用できるように当アルゴリズムを修正し、株価の高頻度データに適用して取引時間内における株価のボラティリティの推移を分析した。この応用においてもボラティリティの日中季節性が問題となるため、SCD モデルのときと同じくバーンスタイン多項式で日中季節性を表現し、他のパラメータと同時に推定を実行した(なお当該分野の先行研究である Stroud and Johannes (2014) ではボラティリティの日中季節性をスプライン関数で表現している)。この研究成果は Nakakita and Nakatsuma (2021) として既に公刊されている。

## 参考文献

- Bauwens, L. and Veredas, D. (2004). The stochastic conditional duration model: a latent variable model for the analysis of financial durations, *Journal of Econometrics*, 119, 381–492.
- Brownlees, C. T. and Vannucci, M. (2013). A Bayesian approach for capturing daily heterogeneity in intra-daily durations time series, *Studies in Nonlinear Dynamics & Econometrics*, 17, 21–46.
- Chan, J. C. C. and Jeliaskov, I. (2009). Efficient simulation and integrated likelihood estimation in state space models, *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, 1, 101–120.
- Engle, R. F. and Russell, J. R. (1998). Autoregressive conditional duration: a new model for irregularly spaced transaction data, *Econometrica*, 66, 1127–1162.
- Gregor, K. and Frühwirth-Schnatter, S. (2014). Ancillarity-sufficiency interweaving strategy (ASIS) for boosting MCMC estimation of stochastic volatility models, *Computational Statistics & Data Analysis*, 76, 408–23.
- McCausland, W. J., Miller, S. and Pelletier, D. (2011). Simulation smoothing for state-space models: A computational efficiency analysis, *Computational Statistics & Data Analysis*, 55, 199–212.
- Nakakita, M. and Nakatsuma, T. (2021). Bayesian analysis of intraday stochastic volatility models of high-frequency stock returns with skew heavy-tailed errors, *Journal of Risk and Financial Management*, 14, 145.
- Nakatsuma, T. (2000). Bayesian analysis of ARMA–GARCH models: A Markov chain

- sampling approach, *Journal of Econometrics*, 95, 57–69.
- Omori, Y., and Watanabe, T. (2008). Block sampler and posterior mode estimation for asymmetric stochastic volatility models, *Computational Statistics & Data Analysis*, 52, 2892–2910.
- Strickland, C. M., Forbes, C. S. and Martin, G. M. (2006). Bayesian analysis of the stochastic conditional duration model, *Computational Statistics & Data Analysis*, 50, 2247–2267.
- Stroud, J. R. and Johannes, M. S. (2014). Bayesian modeling and forecasting of 24-hour high-frequency volatility, *Journal of the American Statistical Association*, 109, 1368–1384.
- Yu, Y. and Meng, X.-L. (2011). To center or not to center: That is not the question—An ancillarity-sufficiency interweaving strategy (ASIS) for boosting MCMC efficiency, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 20, 531–70.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Nakakita Makoto, Nakatsuma Teruo	4. 巻 14
2. 論文標題 Bayesian Analysis of Intraday Stochastic Volatility Models of High-Frequency Stock Returns with Skew Heavy-Tailed Errors	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Risk and Financial Management	6. 最初と最後の頁 145 ~ 145
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/jrfm14040145	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 0件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 中北誠
2. 発表標題 Bayesian Analysis of Intraday Stochastic Volatility Models of High Frequency Stock Returns with Skew Heavy-Tailed Errors
3. 学会等名 2020年度統計関連学会連合大会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Tomoki Toyabe
2. 発表標題 Modeling financial durations with limit order book information
3. 学会等名 The 4th Eastern Asia Meeting on Bayesian Statistics (EAC-ISBA 2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Tomoki Toyabe
2. 発表標題 Modeling financial durations with limit order book information
3. 学会等名 The 13th International Conference on Computational and Financial Econometrics (CFE2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Nakakita
2. 発表標題 Bayesian analysis of intraday stochastic volatility models with skew heavy-tailed error and smoothing spline seasonality
3. 学会等名 The 4th Eastern Asia Meeting on Bayesian Statistics (EAC-ISBA 2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Makoto Nakakita
2. 発表標題 Bayesian modeling of high frequency stochastic volatility with intraday seasonality and skew heavy-tailed error
3. 学会等名 The 13th International Conference on Computational and Financial Econometrics (CFE2019) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	中北 誠  (Nakakita Makoto)		
研究協力者	鳥谷部 智規  (Toyabe Tomoki)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------