

令和 4 年 5 月 15 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2021

課題番号：19K01730

研究課題名（和文）漸近論を用いたレジーム・スイッチング・モデルの新展開

研究課題名（英文）Asymptotic theoretic approach for pricing derivatives in the regime switching model

研究代表者

室井 芳史（Muroi, Yoshifumi）

東北大学・経済学研究科・教授

研究者番号：90448051

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,600,000円

研究成果の概要（和文）：離散フーリエ解析を軸とした金融派生商品の価格評価について研究を行った。そこでは、偏微分方程式における漸近理論と離散フーリエ解析の組み合わせによるオプション価格の新手法と、2項木などツリーモデルとFFTや離散コサイン変換など離散フーリエ解析の諸手法の組み合わせによる新しいオプション価格評価法の2種類の成果があった。特に、レビ過程のようなツリーによるオプション価格評価とは相性があまり良くないと思われていた手法においても極めて高速かつ高精度にオプション価格を計算する手法を提案できた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今世紀になり、レビ過程を用いたオプション価格評価は数理ファイナンスにおいて注目を集めてきた分野である。フーリエ解析やモンテ・カルロ法などを利用することで、レビ過程を用いたファイナンスの諸問題に対処してきた。これらの研究は数理的に簡単とは言い難い面があり、レビ過程の金融実務での応用を遠ざけてきたことは否めない。本研究成果では、レビ過程を用いた株価モデルをツリーによって近似し、直観的に理解しやすいものあまり効率が良くないと考えられがちだった本手法においても高速かつ高精度なオプション価格計算を可能とした。これにより、金融実務においてもレビ過程の利用が容易になるものと考えている。

研究成果の概要（英文）：Studies on valuation of financial derivatives based on discrete Fourier analysis were conducted. There are two kinds of results: a new method for option pricing based on a combination of asymptotic theory in PDEs and discrete Fourier analysis, and a combining of tree methods, such as binomial trees, and various technique in discrete Fourier analysis, such as FFT and discrete cosine transforms. In particular, we have proposed a new fast and accurate method to calculate option prices even for models such as the Levy process, which were not considered to be very compatible with option pricing by tree analysis.

研究分野：数理ファイナンス

キーワード：数理ファイナンス 確率過程 数値計算

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

数理ファイナンスにおいて中心的な研究分野の一つにオプションなど金融派生商品の価格評価が挙げられる。派生商品評価はほぼ半世紀前に始まり、今やファイナンスの大きな研究テーマとなった。研究当初は原資産価格が幾何ブラウン運動に従うモデルの研究が主になったが、精緻なモデルの探求とともに、確率ボラティリティ・モデル、ジャンプ拡散過程、レビ過程モデルなど多くのモデルを生み出してきた。近年、注目を集めている分野の一つにレジーム・スイッチング・モデルが挙げられる。レジーム・スイッチング・モデルは経済状況の構造変化を組み込んだモデルである。確率・統計や微分方程式で多用される漸近論は数理ファイナンスにおいても基本的な手法となったが、過去に漸近論とレジーム・スイッチング・モデルを組み合わせた研究はあまり顧みられていない。そこで、漸近論とレジーム・スイッチング・モデルを含めた様々なモデルとの組み合わせにより、より広いモデルにおいて派生商品の価格評価を行うことが急務であった。

## 2. 研究の目的

研究開始当初の背景で述べた通り、過去の研究と比べてより広いモデルにおいて金融派生商品の価格評価をする手法の開発が求められている。現在、金融実務の世界では派生商品の理論価格や感応度を見ながら取引することは当たり前であり、精緻なモデルでもより早く価格や感応度を数値的に計算することが強く求められる時代になった。そこで、レジーム・スイッチング・モデルにおいて金融派生商品の効率的な数値計算法の探求を軸とした研究を提案した。

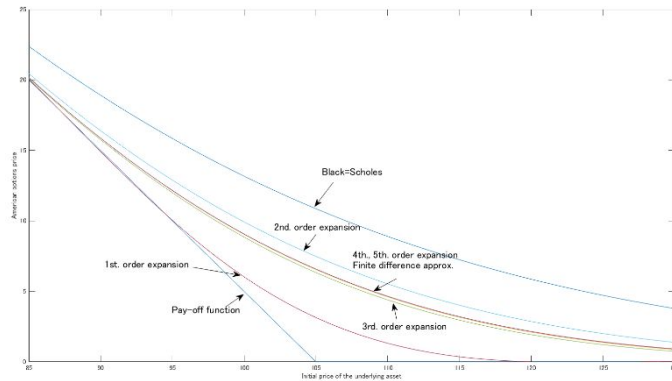
## 3. 研究の方法

数理ファイナンスにおいて、この20年ほどレジーム・スイッチング・モデルにおけるオプション価格評価問題が注目を集めてきた。レジーム・スイッチング・モデルにおけるオプション価格評価ではラプラス変換やフーリエ変換が多用され、これらの数値的逆変換を利用することで価格を導出することは、よく研究されてきた方法である。近年では、これらの積分変換による手法により、ヨーロッパ・オプションのようなペイ・オフが原資産価格の満期までの経路に依存しない商品のみならず、バミューダ・オプションやアメリカン・オプションのように早期行使権を持つ金融派生商品の価格評価が可能となっている。一方で、確率・統計や微分方程式の漸近理論でもフーリエ変換を挟むことで様々な計算を可能としてきた。よって、本提案では、フーリエ変換やラプラス変換の数値的な計算手法と漸近論を組み合わせることで、様々なモデルにおいてヨーロッパ・オプションやアメリカン・オプションなど多くの種類の金融派生商品の価格を効率的に計算できるようになるものと期待される。

## 4. 研究成果

### (1) 局所ボラティリティ・モデルにおけるオプション価格評価への漸近論の応用

近年、偏微分方程式において様々なタイプの漸近論が提案されており、数理ファイナンスでも活発に利用されている。Muroi (2020) では、微分方程式の漸近論でも正則摂動と呼ばれる基本的な手法と離散フーリエ変換を利用してオプション価格の計算を行った。具体的には、幾何ブラウン運動ではボラティリティが定数なのに対し、本研究で用いたモデルではボラティリティが原資産価格の関数となっているモデル(局所ボラティリティ・モデル)を対象にオプション価格を計算している。今回提案した摂動論ではブラック・ショールズ・モデル(幾何ブラウン運動モデル)周りで計算しているので、0次オーダーの項がブラック・ショールズの偏微分方程式の解で書き表されることが特徴である。(対数)原資産価格の特性関数を偏微分方程式によって計算することで、0次オーダーでは正規分布の特性関数が、高次のオーダーは正規分布の特性関数に多項式を掛けた式で表されることが分かる。この方法の利点は特性関数の高次のオーダーの計算はアルゴリズム的に計算できることであり、直接オプション価格を求めるのと異なり、特性関数の高次の漸近展開による結果がアルゴリズムにより次々と計算できることにある。また、ジャンプを含んだモデルにも対応可能であり、すでに求めた漸近展開の結果に特性関数のジャンプの寄与分を掛けてやるだけで簡単に特性関数が計算できる。あとは、Carr and Madan (1999) によるオプション価格公式を数値積分により求めることなどにより、オプション価格を簡単に計算できる。繰り返し高速フーリエ変換を利用することでバミューダ・オプションのような早期行使権のある派生商品の価格付けにも適用できることが分かった。今回用いた手法はレジーム・スイッチング・モデルを掛け合わせる際には基本となり得る手法であり、研究の最終目標への良いスタート地点であると考えられた。



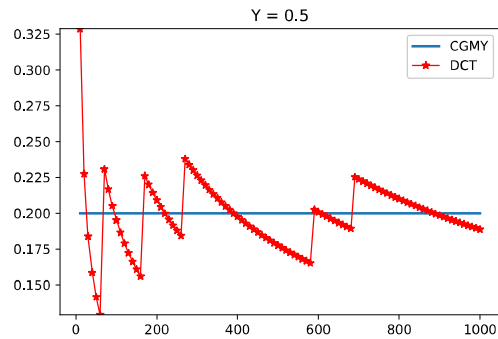
図は研究成果(1)において漸近展開法を用いてアメリカン・オプション価格を求めたときの理論価格の数値計算結果を表す。高次のオーダーまで展開することにより近似精度が上がる事が分かる

### (2) 離散 Carr and Madan 公式を用いたオプションの価格評価について

(1)の研究をしている際に、特性関数を偏微分方程式で計算するのならばその代わりに2項木で特性関数を計算し、それを Carr and Madan(1999)によるオプション価格公式に代入したらオプション価格は求まるかどうかについて疑問に思った。そこで、そのような数値計算を行ってみたところ高精度にオプション価格が計算できることが判明した。その成果をまとめた研究が Muroi et al. (2021)である。2項木を用いてオプション価格を計算する場合は通常はバックワード・インダクション・アルゴリズムを利用する。ところが、ツリーに特性関数を持ち込む場合には2項定理や多項定理を用いれば特性関数は閉じた形で表現できる。Carr and Madan 公式についても、はじめから離散モデルに用いるために計算した離散型の Carr and Madan 公式を求めるとオプション価格が簡単に計算できるのではないかと予想を立てた。そこで、初めから2項木を利用することを前提に Carr and Madan 公式を計算してみたところ、連続モデルにおける Carr and Madan 公式とよく似た形の結果を得た。そこで、その式を離散 Carr and Madan 公式と名付けることとした。この方法は、多項モデルを利用することでバリアンス・ガンマ・モデルなど近年研究が行われているレビ過程のモデルにおけるオプション価格付けにすぐに拡張できるという点で優位性がある。また、高速フーリエ変換を利用することで複数の行使価格においてオプション価格を一気に出すことも可能であった。最終的には、ツリーではあまり効率的に価格計算ができなかったバリアンス・ガンマ・モデルにおいても極めて高速・高精度にヨーロッパン・オプションの価格計算を行うことが可能となった。

### (3) 離散コサイン変換を用いたオプションの価格評価について

原資産価格の特性関数が求まれば、特性関数を反転させてオプション価格を求める方法はいくつかの方法が知られている。(2)では、離散 Carr and Madan 公式を用いたオプション価格を導出した。ところで、近年、数理ファイナンスでは特性関数を反転させオプション価格を求めるのに Fang and Oosterlee (2008)による COS 法を用いる手法が注目を集めている。そこで、(2)の研究でも COS 法に対応する手法があるのではないかと興味を持った。COS 法は画像処理の基本的な道具である離散コサイン変換に対応する手法なので、離散コサイン変換が利用できるか検討を行った。その研究成果をまとめたものが Muroi and Suda (2022)である。連続時間の COS 法を離散モデルに適用させることは、ちょうど、4種類の離散コサイン変換のうち画像処理でもよく利用される II 型の離散コサイン変換をツリーのような離散モデルに適応していることに対応することが分かった。(2)の研究と同様に、離散コサイン変換を利用することで広いクラスの確率過程についてオプション価格が計算できることが分かった。(2)の研究で用いたバリアンス・ガンマ・モデルのツリーをさらに進化させることで、CGMY モデルにおいてもツリーを利用してオプション価格が計算できるようになった。CGMY モデルはパラメータによって複合ポアソン・モデル、強度が無限大の有界変動モデル、強度が無限大の非有界変動モデルとなり得る広いクラスのレビ過程である。過去の研究では、ツリーで強度が無限大の非有界変動モデルでオプション価格は計算できなかったものと思われる。今回、新しいタイプのツリーを提案したことで、CGMY モデルのほぼ全てのケースでツリーを用いてもオプション価格が高速・高精度に計算できるようになった。



図は研究成果(3)において指数 CGMY 過程モデルにおいてツリー法と離散コサイン変換を組み合わせさせて数値計算したヨーロッパン・オプション価格の図。横線が他手法で計算した比較用の計算結果。離散コサイン変換を援用することでツリーを用いても指数 CGMY 過程モデルにおいてもオプション価格が高速かつ高精度で求めることができるようになった。

一連の研究において後半では、漸近論やレジーム・スイッチング・モデルと離れてしまい、結局、レビ過程のモデルでツリーを持ちいたオプション価格計算の研究がメインとなってしまった。初期の予定と異なる方向での成果が主となってしまったのは予想外ではあるが、最終的には計算ファイナンスの分野において十分な貢献があったものと考えている。

#### <引用文献>

Carr, P. and Madan, D. (1999) Option valuation using the fast Fourier transform, *Journal of Computational Finance* 2(4) 61-73.

Fang, F. and Oosterlee, C. W. (2008) A novel pricing method for European options based on Fourier-cosine series expansions, *SIAM Journal of Scientific Computing* 31(2) 826-848.

Muroi, Y. (2020) CCF approach for asymptotic option pricing under the CEV diffusion, *International Journal of Computer Mathematics* 97(8) 1603-1620.

Muroi, Y., Saeki, R., and Suda, S. (2021) Binomial tree method for option pricing: Discrete Carr and Madan formula approach, *International Journal of Financial Engineering* 8(2) 215002.

Muroi, Y. and Suda, S. (2022) Binomial tree method for option pricing: Discrete cosine transform approach, *Mathematics and Computers in Simulation* 198 312-331.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yoshifumi Muroi, Ryota Saeki, and Shitaro Suda	4. 巻 -
2. 論文標題 Binomial Tree Method for Option Pricing: Discrete Carr and Madan Formula Approach	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Financial Engineering	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Muroi Yoshifumi	4. 巻 97
2. 論文標題 CCF approach for asymptotic option pricing under the CEV diffusion	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Journal of Computer Mathematics	6. 最初と最後の頁 1603 ~ 1620
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00207160.2019.1639675	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Muroi Yoshifumi, Suda Shintaro	4. 巻 198
2. 論文標題 Binomial tree method for option pricing: Discrete cosine transform approach	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematics and Computers in Simulation	6. 最初と最後の頁 312 ~ 331
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.matcom.2022.02.032	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 室井芳史	
2. 発表標題 Binomial tree method for option pricing: Discrete Carr and Madan formula approach	
3. 学会等名 韓国金融工学会（国際学会）	
4. 発表年 2021年	

1. 発表者名 室井芳史
2. 発表標題 2項分岐木を用いたオプション価格計算の手法：離散 コサイン変換アプローチ
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 室井芳史
2. 発表標題 2項分岐木を用いたオプション価格と感応度計算の手法：離散Carr and Madan公式アプローチ
3. 学会等名 日本金融・証券計量・工学学会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 室井芳史
2. 発表標題 2項分岐木を用いたオプション価格と感応度計算の手法：離散Carr and Madan公式アプローチ
3. 学会等名 金融工学・数理計量ファイナンスの諸問題 2020 (招待講演)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Yoshifumi Muroi	4. 発行年 2022年
2. 出版社 Springer	5. 総ページ数 114
3. 書名 Computation of Greeks Using the Discrete Malliavin Calculus and Binomial Tree	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------