

令和 5 年 6 月 5 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03391

研究課題名(和文) 特殊関数を用いた代数多様体のレギュレーターとL関数の数論的研究

研究課題名(英文) Arithmetic study of regulators using special functions

研究代表者

朝倉 政典 (Asakura, Masanori)

北海道大学・理学研究院・教授

研究者番号：60322286

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、代数多様体のレギュレーターとL関数について研究を行った。有理数体上で定義された代数多様体のモチヴィックコホモロジーから定まるレギュレーターおよびp進レギュレーターは、L関数の特殊値を表すと予想されているが、一般解決への道のりはまだまだ険しい。本研究では、この予想の一般解決は時期尚早と考えており、予想攻略のための戦略として、さまざまな特殊多様体に焦点を当てた研究を行った。特に、超幾何関数に関連した特殊多様体を詳しく研究し、p進レギュレーターをp進超幾何関数を用いて記述したり、楕円曲線のp進レギュレーターの数値計算法の確立するなど、いくつかの著しい成果をあげた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究課題は、L関数の特殊値を幾何学的な不変量として記述できるかという古くからある整数論の問題に対して貢献するものである。

上述の整数論の問題は、19世紀のディリクレの類数公式から始まる。20世紀になり代数的K理論ないしモチヴィックコホモロジーが導入されるに至り、大きく一般化が進んだ。しかしながら、多くの課題が未解決の状態であり、現在に残された難問となっている。本研究課題では、これらを攻略するため、特殊多様体に焦点を当てたさまざまな研究を行い、いくつかの著しい研究成果をあげることができた。これらの成果は、上述の整数論の問題に対する進歩を与えた。

研究成果の概要(英文)：In this research project, we studied regulators and L-functions of algebraic varieties.

Regulators and p-adic regulators determined from the motivic cohomology of algebraic varieties defined over the field of rational numbers are expected to represent special values of L-functions, but the road to general solutions is still far away. We do not think that the general solution of this conjecture is mature, and then we have focused on various special varieties as a strategy to attack the conjecture. In particular, I studied in detail special varieties related to hypergeometric functions, and achieved some remarkable results, such as describing p-adic regulators using p-adic hypergeometric functions, a numerical approach towards the p-adic Beilinson conjecture for regulators of elliptic curves.

研究分野：数論幾何学

キーワード：レギュレーター 周期積分 L関数

1. 研究開始当初の背景

19世紀にディリクレによって有名な解析的類数公式が証明された。この公式は、ゼータ関数の特殊値を代数体の単数規準(ディリクレのレギュレーターと呼ばれる)によって記述したというものである。20世紀になり、代数的 K 理論が確立されるに伴い、ディリクレの解析的類数公式の一般化が研究されるようになった。代数体の K 群を用いて一般化しようという試みは、最初リヒテンバウムによって行われ、彼が与えた定式化は、ボレルによって証明された。ベイリンソンは、代数多様体の K 群について、ディリクレの類数公式、ボレルの定理を含む形でこの公式を定式化した。この定式化された予想は、現在、ベイリンソン予想と呼ばれている。ベイリンソン予想については、楕円曲線など、一部の特殊な場合について、部分解決しているのみで、一般解決のめどは立っていない状況である。一方、ベイリンソン予想の p 進類似がペランリュウによって定式化された。こちらも一般解決の見込みはないが、この研究分野における研究者にとって重要な指針となっている。

いずれにせよ、本研究課題である、代数多様体のレギュレーターと L 関数の特殊値に関する問題は、多くの課題が山積している状況であり、一般解決につながるような重要な発見には至っていない。

2. 研究の目的

本研究課題の研究代表者は、1 で記載した未解決予想(ベイリンソン予想、p 進ベイリンソン予想)の一般解決を目指すのは、時期尚早であると考えている。本研究課題の目的は、特殊な多様体に焦点を当てた研究を推進することで、当該研究分野における、新しい研究手法を確立すること、また新しい研究領域を開発することである。より具体的には、超幾何関数をキーワードにした代数多様体のレギュレーターを研究する。このような特殊多様体を深く掘り下げることにより、従来の延長上にはない新しい研究領域の開拓、また新しい研究手法を開発することを目的としている。

3. 研究の方法

複素幾何学と p 進コホモロジーを主な道具として数論幾何学の両方から、研究課題に取り組んでいる。課題となっている未解決問題は、一般の代数多様体で成り立つと考えられているが、本研究課題では、一般の代数多様体のレギュレーターと L 関数について研究を行ってはいない。つまり、本研究課題の目標とする未解決問題(ベイリンソン予想、p 進ベイリンソン予想)の一般解決は、現段階では困難であり、そこにこだわっては十分な成果が得られないと考える。本研究課題の研究手法としては、特殊なケースに焦点を当てて、実り多い具体的な計算結果を積み上げることで、将来的なブレークスルーを目指しているのが特徴である。対象とする特殊な代数多様体として、いろいろな代数多様体が対象になりうるが、本研究課題では、超幾何関数に関わる代数多様体を中心にして、課題に取り組む。超幾何関数は古くから研究されてきた特殊関数であり、蓄積された理論や知識が豊富である。これらの知識・理論を取り入れて、本研究課題の中心テーマであるレギュレーターと L 関数の研究に応用することを主だった研究方法としている。

4. 研究成果

超幾何関数を周期積分に持つような代数多様体の族を超幾何モチーフと名付け、それを主な研究対象として研究してきた。主な研究成果は以下のようになる。

- (1) 超幾何モチーフの p 進コホモロジーを利用することにより、Dwork の p 進超幾何関数の数値計算において、それを多項式時間で実行するためのアルゴリズムを開発した。従来の定義に基づく方法だと指数関数時間が必要になってしまう。証明には、p 進コホモロジーの詳細な解析が必要であり、初等的ではない。この研究成果は出版済みであるが、最近、その改良が得られたことを付記しておく(今後、論文として公表し、投稿する予定である)。
- (2) 大坪紀之氏(千葉大学)と共同研究において、超幾何モチーフを定義し、それらについて一連の研究を行った。特に、超幾何モチーフの K1 群のレギュレーターを詳しく研究した。これによって、超幾何関数 3F2 の対数公式の発見を行うことができた。超幾何関数自体は古い歴史をもつ特殊関数であり、膨大な研究結果が存在しているが、レギュレーターという観点から研究を行った点が新しい。実際、その証明は、代数幾何の手法を用いた幾何的なものとなっており、従来の方法では発見するのは難しかったと思われる。なお、我々が発見した対数公式には、 $x=1$ での特殊値についてのものと関数(べき級数)についてのものがあり、前者については、Chen と Chu が初等的な証明を与えることに成功していることを付記する(Nagoya

Math. J. 2023).

- (3) 宮谷和堯氏(大阪公立大学)との共同研究で、ミルナーシンボルからアイソクリスタルの 1-拡大を構成する定理を証明した。これは、 p 進レギュレーターの研究において基礎的な結果である。実際、研究代表者の他の研究において引用し、かつ論文の本質的な場面で使用している。この研究成果は、すでに論文として公表済みであり、現在、投稿・修正中であることを付記しておく。
- (4) 研究代表者は、Dwork の p 進超幾何関数とは異なる、新しい p 進超幾何関数を定義し、いくつかの性質を証明した。特に、この関数の特殊値がある代数曲線の p 進レギュレーターを記述することを示した。この研究成果は、 p 進ベイリンソン予想への応用に期待できると考えている。
- (5) (3)の研究成果をさらに発展させた。高次元の超幾何モチーフを定義し、そのモチフィックコホモロジーにある元を定義し、それを高次ロスシンボルと名付けた。研究では、そのレギュレーター、 p 進レギュレーターを研究し、レギュレーターがある超幾何関数で記述されること、また p 進レギュレーターについては、(3)で行った研究成果である新しい p 進超幾何関数によって記述されることを示すことができた。
- (6) 千田雅孝氏(東京電機大学)との共同研究で、楕円曲線の $K2$ 元の p 進レギュレーターを数値計算するアルゴリズムを与えた。このアルゴリズムの重要なポイントは、Kedlata-Tuitman による p 進収束関数の評価のテクニックである。このテクニックを有効に適用することで、非常に困難とされていた p 進レギュレーターの数値計算が可能になった。千田氏との共著論文においては、我々が実行した p 進レギュレーターの数値が、 p 進 L 関数の特殊値になっていることを数値的に確認できた。これは、 p 進ベイリンソン予想の正しさに対する強い支持になっている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計10件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Asakura Masanori, Otsubo Noriyuki	4. 巻 338
2. 論文標題 Regulators of $K1$ of Hypergeometric Fibrations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Progress in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-65203-6_1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Masanori Asakura	4. 巻 B86
2. 論文標題 Hypergeometric functions and L-functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS講究録別冊	6. 最初と最後の頁 3-20
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Asakura Masanori	4. 巻 373
2. 論文標題 Frobenius Action on a Hypergeometric Curve and an Algorithm for Computing Values of Dwork's p-adic Hypergeometric Functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Springer Proceedings in Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-45
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-84304-5_1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 M. Asakura, T. Yabu	4. 巻 22
2. 論文標題 Explicit logarithmic formulas of special values of hypergeometric functions 3F2	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219199719500408	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Asakura Masanori, Sato Kanetomo	4. 巻 26
2. 論文標題 Chern class and Riemann-Roch theorem for cohomology theory without homotopy invariance	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J.Math.Sci.Univ.Tokyo	6. 最初と最後の頁 249-334
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Asakura Masanori, Otsubo Noriyuki	4. 巻 236
2. 論文標題 A functional logarithmic formula for the hypergeometric functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 29-46
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2018.33	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Asakura Masanori, Otsubo Noriyuki, Terasoma Tomohide	4. 巻 236
2. 論文標題 An algebro-geometric study of special values of hypergeometric functions	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 47-62
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2018.36	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Asakura Masanori, Yabu Toshifumi	4. 巻 -
2. 論文標題 Explicit logarithmic formulas of special values of hypergeometric functions 3F2	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Contemporary Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-22
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0219199719500408	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 朝倉政典	4. 巻 -
2. 論文標題 超幾何関数とL関数	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS講究録別冊	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Asakura Masanori, Chida Masataka, Brunault Francois	4. 巻 10
2. 論文標題 A numerical approach toward the p-adic Beilinson conjecture for elliptic curves over \mathbb{Q}	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Research in the Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 1-58
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40687-023-00374-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 朝倉政典
2. 発表標題 レギュレーターとL関数の特殊値
3. 学会等名 日本数学会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 朝倉政典
2. 発表標題 レギュレーターとL関数の特殊値
3. 学会等名 日本数学会・代数分科会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Asakura Masanori
2. 発表標題 An algorithm of computing special values of Dwork's p-adic hypergeometric functions in polynomial time
3. 学会等名 Hypergeometric Series, Mahler Measures, and Multiple Zeta Values (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Asakura Masanori
2. 発表標題 A generalization of the Ross symbols in higher K-groups and p-adic hypergeometric functions
3. 学会等名 p-adic cohomology and arithmetic geometry 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 朝倉政典
2. 発表標題 超幾何モチーフの1-拡大
3. 学会等名 代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Regulators in Niseko 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 L-functions and motives in Niseko 2022	開催年 2022年～2022年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------