

令和 6 年 6 月 14 日現在

機関番号：10104

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03392

研究課題名（和文）乗法的関数とゼータ関数の零点の研究

研究課題名（英文）A study on multiplicative functions and zeros of zeta functions

研究代表者

赤塚 広隆（Akatsuka, Hirota）

小樽商科大学・商学部・教授

研究者番号：30535860

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,400,000円

研究成果の概要（和文）：リーマンゼータ関数の零点分布は数論の中で重要な研究対象の一つである。本課題では、約数のべき乗の和で定義される関数（約数関数）の増大度に関する性質と、リーマン予想に代表されるゼータ関数の零点分布に関する性質の関係を考察した。その結果、リーマン予想は上述の約数関数がある増大度を持つことと同値であることが分かった。その他、リーマン予想と関連する三角関数についても、相互法則的な性質から現れる関数について結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

約数関数（より一般に数論的関数）の増大度と、ゼータ関数の零点分布は、いずれも整数論で古くから調べられてきた研究対象である。本課題の成果として、これらの対象の間に関係があるという結果を得ることができた。約数関数という、極めて特殊な数論的関数に限った結果ではあるが、数論的関数の増大度とゼータ関数の零点分布の間に新たな関係を見つけたことは、長期的に見てそれぞれの研究対象に新たな視点を提供するものと考えられる。

研究成果の概要（英文）：The distribution of zeros of the Riemann zeta-function is important in number theory. In this research we investigate a relation between the size of divisor functions and zeros of the Riemann zeta-function. In consequence, we obtain a criterion for the Riemann hypothesis in terms of the size of a certain divisor function. We also obtain a result on a reciprocity property for a trigonometric sum.

研究分野：解析的整数論

キーワード：乗法的関数 ゼータ関数 零点

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

非負実数値の数論的関数の大きさを測る概念として、maximal order と minimal order (2つを合わせて extremal order という) がある。これらは、数論的関数の大きさを連続関数で上または下から評価するとき、その限界となる連続関数を見つけるための概念である。

乗法的関数の extremal order に関する性質とゼータ関数の零点分布が密接に結びついている例がいくつか観察されている。例えば、Robin(1984)は「リーマン予想と、約数和 $\sigma(n)$ とその maximal order に関するある不等式の成立と同値である」ことを、Nicolas(1983)は「リーマン予想と、オイラー関数 $\phi(n)$ とその minimal order に関する不等式の成立は同値である」ことを証明した。

Ramanujan は、約数の個数で定義される関数 $d(n)$ の maximal order を系統的に研究した。この論文は 1915 年に出版されたが、出版時に削除された部分がある。削除された部分は 1980~90 年代に原稿のファクシミリ版やタイプセット版などを入手できるようになった。その部分では、様々な乗法的関数の maximal order が扱われている。例えば、 $\sigma(n)$ を正の実数とすると、 n の約数を $\sigma(n)$ 乗して和を取った $\sigma_2(n)$ の maximal order を、リーマン予想の仮定の下で与えている。

2. 研究の目的

長期的には、乗法的関数の extremal order とゼータ関数の零点分布の関係を体系的に理解することを目指す。研究期間内の目標は、1 で述べた Robin や Nicolas の結果のような、extremal order と零点が結びつく例を増やすことである。

3. 研究の方法

上記の目標を達成するため、主に次の二点を研究する。

- (1) Ramanujan が扱った約数関数 $\sigma(n)$ とその maximal order を、リーマンゼータ関数の零点分布の関係という見地から考察する。具体的には、まずリーマン予想より弱い零点分布を仮定したとき、 $\sigma(n)$ の maximal order が得られるか、 $\sigma(n)$ と maximal order の間に大小関係があるかなどを調べる。逆に、得られた $\sigma(n)$ の maximal order や大小関係を仮定した場合、リーマンゼータ関数の零点分布について何が言えるかを調べる。
- (2) (1) で得られた知見をもとに、代数体のイデアルノルムを用いて作られる乗法的関数の maximal order とデデキントゼータ関数の零点分布の関係を調べる。特に、明示的な扱いのしやすい二次体の場合を中心に研究する。

4. 研究成果

- (1) $1/2 < \theta < 1$ に対して、約数関数 $\sigma(n)$ の maximal order に関する主張とリーマンゼータ関数の零点分布に関する主張が同値になることを証明した。具体的には、次の二点を証明した。
ゼータ関数の零点は実部が θ より大のところがないという仮定の下で、上記の約数関数の maximal order は、対数積分を用いて表されることが分かった。
ゼータ関数の零点は実部が θ より大のところにあるという仮定の下で、約数関数の増大度は θ から期待されるものより真に大きくなるような正整数 n の列が存在することが分かった。
特に、約数関数 $\sigma_{1/2}(n)$ を用いてリーマン予想を言い換えることに成功した。

上述の結果、 θ について、約数関数が大きくなる正整数からなる n の増大列を具体的に構成し、その数列上での約数関数の増大度を調べることで証明を行った。本課題では、この n の数列(数列を構成する数を θ -superior highly composite number ということにする)についても考察を行った。正の実数(パラメータの値)を一つ決めると θ -superior highly composite number が有限個決まるが、パラメータの値により θ -superior composite number がどのように決まるかを調べた。また、 θ が有理数のときは、パラメータの値一つに対し、対応する θ -superior highly composite number は 1 個、2 個、4 個のいずれかになることが分かった。

なお、最終年度の実績報告では、 θ については手がかりのみ得られたと報告したが、その直後に上のようにまとまった形で結果が得られた。満足の行く形に整理できたので、速やかに論文を作成し公表したい。

- (2) 代数体から来る乗法的関数、有限環 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 上の一般線形群の個数などで定まる乗法的関数については、一部は基本性質の整理を行った。しかしながら、まとまった成果を得ることができなかった。(1)の結果を得る際に用いた手法などを手がかりとして、ゼータ関数の零点分

布に結びつけるべく研究を継続したいと考えている。

- (3) デデキント和の類似として、Bettin と Conrey は三角関数の有限和を導入した。この有限和を用いたリーマン予想と同値な命題があり、この和も本課題の考察対象とした。この和は(デデキント和よりも弱い意味で)相互法則的な性質を持つことが知られている。この相互法則的な性質に表れる正則関数について、テイラー係数の漸近的な性質の精密化を行った。この結果を論文にまとめ、専門誌に投稿した(九州大学の村上友哉氏との共同研究)。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 赤塚 広隆
2. 発表標題 Bettin-Conreyのコタンジェント和に対する相互法則について
3. 学会等名 第15回福岡数論研究集会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 赤塚広隆
2. 発表標題 Bettin-Conreyのコタンジェント和に対する相互法則について
3. 学会等名 三角函数研究会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 赤塚広隆
2. 発表標題 デデキント和の相互法則の一般化について
3. 学会等名 解析数論セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 赤塚広隆
2. 発表標題 デデキント和の相互法則の一般化について
3. 学会等名 第65回代数学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 赤塚広隆
2. 発表標題 約数を走る和の上極限について
3. 学会等名 数理学談話会（金沢大学）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 赤塚広隆
2. 発表標題 On extreme values of multiplicative functions
3. 学会等名 Zeta Functions in Okinawa 2019
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 RIMS共同研究（公開型）解析的整数論とその周辺	開催年 2021年～2021年
------------------------------------	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関