

令和 5 年 6 月 23 日現在

機関番号：12401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03395

研究課題名(和文)有限群の線形表現と森ファイバー空間内の有限群に関する同変シリンダーの存在性

研究課題名(英文)Representation of finite groups and its application for the study on existence of equivariant cylinders in Mori Fiber Spaces

研究代表者

岸本 崇 (Kishimoto, Takashi)

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：20372576

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：今回の研究課題『有限群の線形表現と森ファイバー空間内の有限群に関する同変シリンダーの存在性』の研究期間中には、最も典型的なシリンダーであるアフィン空間の、森ファイバー空間への、同変及び非同変な埋め込みについて、海外の研究者との共同研究を通して幾つかの重要な結果を得ることができた。同変なケースについては、より一般に考える体も代数閉体とは限らない標数ゼロの一般の体での結果を得ることができた。一方、非同変なケースについては、標数ゼロの代数閉体上で考えるが、線形束を巧みに用いることにより、曲線上の森ファイバー空間にアフィン空間を埋め込む系統的な手法を開発することに成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今回の研究課題は、純粋数学に関することであるので、直接的な社会的意義は希薄かもしれないが、学術的意義は大きい。ある種のアフィン代数多様体の自己同型群に含まれるユニポテント代数群の存在は、対応する射影多様体に含まれるシリンダーの存在に翻訳される。しかし一般に与えられた射影多様体内のシリンダーが存在するかどうかを観察するのは、高次元の場合は困難である。今回の研究結果は、森ファイバー空間構造由来のシリンダーが存在するかどうかを、その生成ファイバーの振る舞いから判定できるという意味で、高次元の射影多様体のシリンダー性を、低次元のシリンダー性に帰着できるという利点があるのは特筆すべきである。

研究成果の概要(英文)：The research project entitled "Representation of finite groups and its application for the study on existence of equivariant cylinders in Mori Fiber Spaces" are devoted mainly to the construction and a classification of equivariant, or non-equivariant completions of the affine spaces, with several international collaborations. As for equivariant case, we can deal with Del Pezzo varieties defined over a field of characteristic zero, which is not necessarily algebraically closed. On the other hand, as for non-equivariant case, certainly we have to work over an algebraically closed field by some technical reason, we succeed into a development of a systematic way in order to construct completions of the affine spaces into Mori fiber spaces over curves.

研究分野：代数幾何学

キーワード：Fano多様体 自己同型群 同変コンパクト化 フォーム 森ファイバー空間

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

研究課題『有限群の線形表現と森ファイバー空間内の有限群に関する同変シリンダーの存在性』の研究が開始した段階では、3次元以上のアフィン空間の森ファイバー空間への埋め込みについては、古島らによる非特異でピカル数が1の3次元 Fano 多様体の場合に分類が完成していたが、次元が大きくなったり、または底空間の次元が1以上の森ファイバー空間への埋め込みは、殆ど知られていなかった。また、先述した古島の分類結果を考慮すると、Fano 多様体が単にアフィン空間を開集合として含んでいるということ、アフィン空間の平行移動によるユニポテント代数群作用が、Fano 多様体全体に延長される(つまり同変な埋め込み)ケースは非常に限定的であることが想像出来るが、具体的には殆ど理解されていなかった。

### 2. 研究の目的

今回の研究課題『有限群の線形表現と森ファイバー空間内の有限群に関する同変シリンダーの存在性』では、主に次に述べる3つの目的があった。

- 1) 底空間が正の次元の森ファイバー空間への、シリンダー、より限定的にアフィン空間の(非同変な)埋め込みを構成する、系統的な手法を開発する。
- 2) 代数閉体とは限らない標数ゼロの一般の体上に定義されている Fano 多様体が、シリンダー、特にアフィン空間を含んでいるかどうかを観察する。
- 3) 2)をさらに推し進めて、2)の Fano 多様体がアフィン空間の同変埋め込みになっているかどうかを観察する。

2),3)の類の問題の意義を、1)の問題に関連させて述べる。底空間が正の次元の森ファイバー空間が与えられたとき、その生成ファイバーを考える。この生成ファイバーは、底空間の関数体上に定義されている Fano 多様体であるが、それは代数閉体ではない。つまり 2), 3)で対象となる Fano 多様体になっている。もしこの生成ファイバーである Fano 多様体がシリンダーを含めば、もともと与えられた森ファイバー空間の全空間も同様にシリンダーを含むことが知られている。従って 2),3)の問題に対して明示的な回答が与えられれば、1)の問題の部分的な回答にはなっている。

### 3. 研究の方法

1)と2),3)の問題は動機としては上述した通りで繋がりはあるが、使用するテクニックの性質は異なる。実際1)の問題は代数閉体上の話であるので、いわゆる通常の代数幾何学的手法(交点理論、森理論 etc)が適用できる。しかし2), 3)は考えている体は一般の標数ゼロの体というだけであるので、1)と同じような議論・考察はそのままでは適用できない。以下では1)と2),3)のそれぞれについて、研究の方法について概略を述べる。

- 1) の問題については、スローガンは「ある種の線形束からスタートして、基底点の解消、極小モデル理論を経由することにより森ファイバー内にアフィン空間を実現する」ということである。一般に線形束が与えられたとき、その基底点解消はいつでも存在することは良く知られているが、しかしながら明示的にその基底点解消を記述することは高次元の場合には非常に困難である。2次元迄の話と違い、3次元以上ではこの種の困難点が多く発生する。我々の場合であっても全ての線形束の明示的な基底点解消は無謀であるが、ある種の性質を満たす線形束に対しては、明示的に基底点を解消するテクニックを編み出した。技術的になるので詳細は避けるが、大雑把に述べると、ピカル群の豊富生成元の何倍かを1つメンバーとして含み、また他のメンバーでその豊富生成元に沿って高々マイルドな特異点を持っているような線形束の場合には、基底点解消が明示的に記述できる。その後に必要な考察は、基底点解消後に得られる射に相対的に極小モデルプログラムを実行する際に、豊富生成元の補集合の部分があるどのように変化していくのかを、注意深く観察することである。この部分については、高次元双有理幾何学の諸結果を随所で適用する必要があるが、我々が注目しているある種の性質を満たす線形束である場合には、豊富生成元の補集合は極小モデルプログラムを経由しても保たれることが分かった。これら考察の系として、アフィン空間を森ファイバー空間に埋め込む系統的な方法が得られた。

2),3) の問題については、問題の趣は1)とは大きく異なる。Fano 多様体が定義されている体は代数閉体とは限らない一般の標数ゼロの体であるので、代数閉体の場合に自然になり立っている

た幾何学的な議論がそのままでは適用できない場合が多い。例えばその体上に定義された有理点が存在するとは限らなくなる。もっと言えば、代数閉体に基底変換を施せば同型になるような Fano 多様体であっても、小さい体上では同型でない場合は茶飯事である。このような状況を踏まえた上で、我々は次元が 3 以上の del Pezzo 多様体のフォームと、それがどのような場合にはアフィン空間の埋め込み、更には同変埋め込みになっているのかについて考察をした。先述した通り、代数閉体上とは限らないので通常の代数幾何学の議論をそのままでは適用できないが、代数閉包に基底変換をした上で、対応するガロア群作用の軌道を注意深く観察することで、言い換えるならば、代数閉体上の代数幾何学にガロア群の作用をプラスして考えることにより、我々は次元が 3 以上の次数 5 の del Pezzo 多様体に対して、完全な回答を与えることに成功した。

#### 4. 研究成果

1)の問題については、「3. 研究の方法」の項目で得られた結果の要旨は述べているので、ここでは 2), 3)に関連した結果を述べる。3次元以上の次数 5 の del Pezzo 多様体のフォームを考える。このとき:

次元が 3 である場合、任意のフォームは A2-シリンダーを含む。さらに A3 を含む必要十分条件も与えることに成功した。結果的に、次元が 3 である場合にはフォームは P1 のフォームと同じ数だけ存在するが、A3 を含むのはただ 1 つだけである。

次元が 4, 5, 6 である場合には、フォームは自明なものしか存在しない。しかもそれは、同じ次元のアフィン空間の同変な埋め込みになっている。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Adrien Dubouloz, Takashi Kishimoto, Karol Palka	4. 巻 -
2. 論文標題 Completions of affine spaces into Mori fiber spaces with non-rational fibers	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/jlms.12598	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Adrien Dubouloz, Isac Heden, Takashi Kishimoto	4. 巻 301
2. 論文標題 Rees algebras of additive group actions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 593, 626
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-021-02926-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Adrien Dubouloz, Isac Heden, Takashi Kishimoto	4. 巻 XXI
2. 論文標題 Equivariant extensions of $G_a$ -torsors over punctured surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Annali della Scuola Normale Superiore de Pisa, Classe di Scienze	6. 最初と最後の頁 133, 167
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2422/2036-2145.201710_002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Adrien Dubouloz, Takashi Kishimoto	4. 巻 373
2. 論文標題 Deformations of $A_1$ -cylindrical varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1135-1149
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-018-1774-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Adrien Dubouloz, Takashi Kishimoto	4. 巻 69
2. 論文標題 Cylindres dans les fibrations de Mori: Formes du volume quintique de del Pezzo	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales de l'Institut Fourier	6. 最初と最後の頁 2377-2393
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計4件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Takashi Kishimoto
2. 発表標題 Equivariant completions of vector groups into Fano varieties
3. 学会等名 Birational Geometry and K-stability of Fano varieties
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takashi Kishimoto
2. 発表標題 Equivariant and non-equivariant completions of vector groups into Mori fiber spaces
3. 学会等名 Rationality, Moduli spaces and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takashi Kishimoto
2. 発表標題 Pencils and Completions of the affine space and the exotic ones into Mori Fiber Spaces
3. 学会等名 Motivic Geometry Conference, The Centre for Advanced Study at the Norwegian Academy of Science and Letters in Oslo (CAS), Oslo, Norway (Online) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Takashi Kishimoto
2. 発表標題 Cylinders in Mori Fiber Spaces I
3. 学会等名 Edge Days 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

埼玉大学大学院理工学研究科 数理電子情報専攻 数学プログラム/理学部数学科  
<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp>

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 The 21st Affine Algebraic Meeting	開催年 2023年～2023年
---	--------------------

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Universite de Bourgogne			
チリ	Universidad Tecnica Federico Santa Maria			
英国	University of Edinburgh			
ポーランド	Polish Academy of Sciences			

共同研究相手国	相手方研究機関			
スウェーデン	KTH Royal Institute of Technology			