

令和 6 年 6 月 3 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03399

研究課題名(和文)量子代数とモジュライ理論

研究課題名(英文)Quantum algebras and moduli theory

研究代表者

柳田 伸太郎 (Yanagida, Shintarou)

名古屋大学・多元数理科学研究科・准教授

研究者番号：50645471

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：主要成果は頂点代数の構造論である。超対称性・Beilinson-Drinfeldカイヤル代数・オペラッド理論・ジェット空間及び形式的ループ空間等のモジュライ空間と関係させて頂点代数の研究を行った。dg頂点代数とそのBRST簡約を用いた2次元位相的場の理論の変種を構成し、超対称性頂点代数のLiフィルトレーションの詳細な記述を与えた。また学生との共同研究において超対称性頂点代数及び超対称性Poisson頂点代数のオペラッド理論を構築した。その他、Macdonald-Koornwinder多項式をアフィンHecke環の表現論に基づいて学生と共同研究し、パラメータ特殊化に関する統一的な結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究の成果は、頂点代数の構造論を超対称性・モジュライ理論・オペラッド理論と関連させた純粋数学的なものであるが、数理物理学における重要概念である超対称性の、更なる数学的理解に貢献するものである。特に、場の量子論や超弦理論といった先端的な理論物理学における超対称性を純粋数学的に精密に理解するという、21世紀における数理物理学の大テーマに進捗を与えるものである。また、関連研究であるMacdonald-Koornwinder多項式の話も、将来的には場の量子論と関係することが期待されている。このように、本研究は21世紀の数理物理学に一定の貢献を与えるものである。

研究成果の概要(英文)：The main achievement is on the structure theory of vertex algebras. Relating the structure of vertex algebras to supersymmetry, Beilinson-Drinfeld chiral algebras, operad theory, and moduli spaces such as jet and formal loop spaces, I obtained several novel results. In particular, I achieved the derived gluing construction of dg vertex algebras, which gives a kind of 2d topological field theory. Also I studied the Li filtration of SUSY vertex algebras. In a joint work with my student, we constructed the algebraic operads of SUSY and SUSY Poisson vertex algebras. Another research topic is the Macdonald-Koornwinder polynomials. In a joint work with my student, we obtained a unified description of parameter specializations of Macdonald-Koornwinder polynomials, using the representation theory of affine Hecke algebras.

研究分野：表現論、代数幾何、数理物理

キーワード：vertex algebra algebraic operad topological field theory moduli theory Macdonald polynomial affine Hecke algebra

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

頂点代数は理論物理における二次元共形場理論の代数的定式化として導入された量子代数の 1 クラスである。現在、頂点代数は場の量子論や超弦理論などの数理物理に現れるだけでなく、表現論のおよび代数幾何学などの純粋数学の様々な分野に現れる興味深い対象である。

本研究の当初の目標は「ループ空間に纏わる代数幾何学的なモジュライ理論を基礎として、頂点代数をはじめとする量子代数の代数構造や表現論の研究をすること」であった。特に代数多様体の導来圏や Fourier 向井変換の、頂点代数の理論における対応物を考えることを大きな目標とした。最初の具体的な目標として、カイラル微分作用素環と呼ばれる頂点代数層を、因子化代数と呼ばれる頂点代数の幾何学的定式化を用いて研究することを最初の目標とした。

## 2. 研究の目的

頂点代数の「強み」として、数理物理学における重要概念である超対称性をその定式化に組み込んだ、超対称頂点代数の理論の存在がある。この理論は理論物理における超対称性の研究を純粋数学的に理解するアプローチを与えるものであるが、まだその理解は十分でない。本研究の第一の目的は、超対称頂点代数の構造の理解を深めること、特に頂点代数の associated variety に代表される幾何学的研究の超対称性類似を確立することである。

第二の目的として、2010 年代半ばより理論物理で注目を集めている、頂点代数を射の空間とする二次元位相的場の量子論を研究し、特にその基礎づけを確立することである。

第三の目的として、頂点代数に関連する量子代数及び特殊函数論のトピック、特に Macdonald-Koornwinder 多項式の研究を行う。これは 2 種類のパラメータを持つ多変数  $q$ -直交多項式系であり、頂点代数の「 $q$ -変形」や格子模型、可積分な場の量子論と関連する事が知られているが、それら「関連」の構造的理解は発展途上である。第一、第二の目的と関連した研究を行うことで、「 $q$ -差分変形された良い場の量子論」のクラスを見出すことを目標とする。

## 3. 研究の方法

第一の目的の超対称頂点代数の構造論については、Li filtration や  $C_2$ -Poisson 代数及び associated variety といった通常の頂点代数における諸概念の超対称類似を構成する。また、頂点代数の幾何学的再定式化であるカイラル代数及び因子化代数、及び関連する概念であるカイラル・オペラッドの超対称類似を構成する。

第二の目的の頂点代数的な位相的場の量子論については、 $dg$  頂点代数の BRST 簡約の技術を確立し、それを gluing に用いることで位相的場の量子論が構成できることを証明する。

第三の目的に関して、Macdonald-Koornwinder 多項式のパラメータ特殊化の研究を行う。この多項式系は  $(C\text{-check}, C)$  型アフィンルート系に付随した多変数  $q$ -直交多項式系であり、Macdonald 多項式の中でも最多の  $5+1$  個のパラメータを持つ。そのパラメータ特殊化をアフィン Hecke 環の構造論に基づいて統制的に調べることで、既存文献の統合、及び新たな函数等式や  $q$ -頂点代数の理解に役立てる。

## 4. 研究成果

第一目的前半については単著論文

S. Yanagida, "Li filtrations of SUSY vertex algebras",  
Lett. Math. Phys. 112 (2022), Article no. 103, 77pp.

を出版した。この論文では超対称頂点代数の Li filtration,  $C_2$ -Poisson 代数, 随伴超多様体の概念を導入し、超 Virasoro 代数やループ代数の場合における随伴超多様体を求めた。

第一目的後半のカイラル・オペラッドの超対称性類似については、学生との共著論文

Y. Nishinaka, S. Yanagida, "Algebraic operad of SUSY vertex algebra",  
preprint (2022), arXiv:2209.14617.

Y. Nishinaka, S. Yanagida, "Algebraic operad of SUSY Poisson vertex algebra", preprint (2023), arXiv:2305.00714.

を発表し、雑誌投稿した。これらの論文では SUSY カイラル・オペラッドという代数オペラッドを導入し、線形空間  $V$  上の超対称頂点代数の構造が、Lie オペラッドから SUSY カイラル・オペラッドへのオペラッド射と一対一に対応する事を示し、その Poisson 類似も確立した。また並進不変な SUSY カイラル代数との対応も確立した。

以上により第一目的はある程度の部分が達成されたが、因子化代数の超対称類似については研究できなかった。今後の課題としたい。

第二目的については単著論文

S. Yanagida, "Derived gluing construction of chiral algebras",

Lett. Math. Phys. 111 (2021), Article no. 51, 103pp.

を出版した。この論文では、荒川 (2016) が確立した頂点代数を射の空間とする二次元位相的場の量子論の、導来類似を構成した。即ち、射の空間は dg 頂点代数の構造を持ち、射の合成は dg 頂点代数の BRST 簡約とする位相的場の理論を構成した。これによって理論の基礎部分の理解が進んだ。その一方、この構成に現れる dg 頂点代数の詳細や具体例の研究が今後の課題として残されている。

第三目的については学生との共著論文

K. Yamaguchi, S. Yanagida, "Specializing Koornwinder polynomials to Macdonald polynomials of type B, C, D and BC", J. Algebraic Combin. 57 (2023), 171-226.

K. Yamaguchi, S. Yanagida, "A review of rank one bispectral correspondence of quantum affine KZ equations and Macdonald-type eigenvalue problems", RIMS kokyuroku 2258 (2023).

を出版した。最初の論文で Macdonald-Koornwinder 多項式のパラメータ特殊化のうち、アフィンルート系の構造と整合的なものの分類を行った。これにより既存文献の統合が図られ、また新しい超幾何公式が得られた。二つ目は双スペクトル性を持つ Macdonald-Koornwinder 多項式のレビュー論文であるが、特に一変数の場合について、既存文献にない詳細を提示した。

その他、量子代数の構造論の研究として、導来 Hall 代数に関する学生との共著論文

R. Shimoji, S. Yanagida, "A study of symmetric functions via derived Hall algebra", Comm. Algebra vol. 49 (2021), issue 3, 979-1005.

を出版した。また Macdonald 多項式及びその楕円差分類似と関連する、楕円 Ding 庵原代数を導入し、学生との共著論文

S. Yanagida, M. Hattori, "A dynamical analogue of Ding-Iohara quantum algebras", preprint (2022), arXiv:2210.02777

を発表、雑誌投稿した。

そして、やはり表現論と特殊函数論に関する研究として、Schur-Weyl 双対性と  $(q-)$ Racah 超幾何直交多項式を用いた離散確率分布の構成、及び量子情報への応用の共同研究を

M. Hayashi, A. Hora, S. Yanagida, "q-Racah probability distribution", Ramanujan J. (2024), DOI: <https://doi.org/10.1007/s11139-024-00859-w>

M. Hayashi, A. Hora, S. Yanagida, "Stochastic behavior of outcome of Schur-Weyl duality measurement", preprint (2021, 2023), arXiv:2104.12635v2.

として発表、前者は出版済みであり、後者は雑誌投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 4件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Yanagida Shintarou	4. 巻 112
2. 論文標題 Li filtrations of SUSY vertex algebras	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 1~77
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-022-01595-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yamaguchi Kohei, Yanagida Shintarou	4. 巻 57
2. 論文標題 Specializing Koornwinder polynomials to Macdonald polynomials of type B,C, D and BC	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Combinatorics	6. 最初と最後の頁 171~226
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10801-022-01165-8	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ryosuke Shimoji, Shintarou Yanagida	4. 巻 49
2. 論文標題 A study of symmetric functions via derived Hall algebra	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 979-1005
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2020.1825723	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Shintarou Yanagida	4. 巻 111
2. 論文標題 Derived gluing construction of chiral algebras	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 pp103
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-021-01394-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahito Hayashi, Akihito Hora, Shintarou Yanagida	4. 巻 -
2. 論文標題 q-Racah probability distribution	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 1-28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-024-00859-w	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計19件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 6件)

1. 発表者名 Shintarou Yanagida
2. 発表標題 Introduction to Macdonald polynomials
3. 学会等名 SUSTech-Nagoya workshop on Quantum Science 2022 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Shintarou Yanagida
2. 発表標題 A discrete probability distribution expressed by Racah polynomial arising from Schur-Weyl duality
3. 学会等名 16th International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Application, Zoom (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 Macdonald 多項式入門
3. 学会等名 幾何学・表現論をめぐる合同セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shintarou Yanagida
2. 発表標題 Probability distribution expressed by Racah hypergeometric orthogonal polynomial,
3. 学会等名 SUSTech-Nagoya workshop on Quantum Science (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 Derived gluing construction of chiral algebras
3. 学会等名 名古屋代数幾何学セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 幾何学の導来Hall代数
3. 学会等名 京都大学数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shintaro Yanagida
2. 発表標題 Derived gluing of chiral algebras
3. 学会等名 京都表現論セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 幾何学的導来Hall代数
3. 学会等名 2020年度代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 非定常Ruijsenaars関数と量子DeII系に関する注釈
3. 学会等名 Quantum Geometry in Gauge Theory and Strings
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 Geometric derived Hall algebra I,II
3. 学会等名 阪大代数学幾何学セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 幾何学的導来Hall代数 1,2,3
3. 学会等名 Seminar on Geometry and related topics
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 Geometric derived Hall algebra
3. 学会等名 ALReT2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Yanagida
2. 発表標題 Introduction to Hall algebras
3. 学会等名 International PhD Lab in Mathematics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shintaro Yanagida
2. 発表標題 Deformation theory and vertex algebras
3. 学会等名 Workshop and School "Topological Field Theories, String theory and Matrix Models - 2019" (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 Hall algebras and Yang-Baxter equations
3. 学会等名 研究集会 $q, q$ (招待講演)
4. 発表年 2020年



1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 Macdonald多項式入門
3. 学会等名 幾何学・表現論をめぐる合同セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Shintarou Yanagida
2. 発表標題 Quick introduction to chiral quantization
3. 学会等名 Shenzhen-Nagoya Workshop on Quantum Science 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 Okounkov's conjecture on qMZV
3. 学会等名 q級数とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 柳田伸太郎
2. 発表標題 頂点代数とモジュライ理論
3. 学会等名 現代数学の諸相
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

柳田伸太郎 <a href="https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/index-j.html">https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/index-j.html</a>
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計7件

国際研究集会 Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2021	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 SUSTech-Nagoya workshop on Quantum Science	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 SUSTech-Nagoya workshop on Quantum Science 2022	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 SUSTech-Nagoya workshop on Quantum Science 2023	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 頂点代数とモジュライ理論	開催年 2024年～2024年
国際研究集会 International Seminar-Type Online Workshop on Noncommutative Integrable Systems	開催年 2024年～2024年
国際研究集会 Quantum Geometry in Gauge Theory and Strings	開催年 2020年～2020年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------