様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５年　６月１２日現在

機関番号：１４２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３４００

研究課題名（和文）有限体上のドリンフェルト・モジュラー曲線の塔から生じる超幾何関数の関数体類似

研究課題名（英文）A function-field analogue of the Gauss hypergeometric function arising from Drinfeld modular curves over finite fields

研究代表者
長谷川　武博（Hasegawa, Takehiro）

滋賀大学・教育学系・教授

研究者番号：８０４０９６１４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,100,000円

研究成果の概要（和文）：(1) 任意階数のドリンフェルト加群の指数型超幾何関数および対数型超幾何関数をそれぞれ定義した． (2) カーリッツ加群の n 回テンソル積の指数関数の係数の全成分を決定し，各成分がカーリッツ加群の指数型超幾何関数の一次結合で表示されることを示した．また，カーリッツ加群の n 回テンソル積の対数関数の係数の全成分を決定し，各成分がカーリッツ加群の対数型超幾何関数の一次結合で表示されることを示した． (3) カーリッツ加群のモチビック・対数型超幾何関数を定義し，カーリッツ加群の対数型超幾何関数の代数点での特殊値がふたたび代数的数であるための必要十分条件を与えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義
(1) Thakur の超幾何関数では代数体の世界の超幾何関数的現象を関数体の世界に再現しきれなかったが，ドリンフェルト加群の超幾何関数を定義したことで，再現できる範疇が拡がった． (2) カーリッツ加群の n 回テンソル積の指数関数および対数関数の係数の全成分を決定したことで，関数体版超越数論の発展が大いに期待できるようになった． (3) カーリッツ加群のモチビック・対数型超幾何関数を定義したことで，関数体版超幾何関数論にモチビック的手法が持ち込めるようになった．たとえば，Anderson-Brownawell-Papanikolas の結果（ABP 判定法）などが使えるようになった．

研究成果の概要（英文）：(1) I defined the exponential-type and the logarithmic-type hypergeometric functions for the Drinfeld modules of arbitrary rank, respectively. (2) I presented the explicit formula of the exponential for the Carlitz-Tate twist, and showed that each entry is expressed as a linear combination of the the exponential-type hypergeometric functions. Also, I determined the explicit formula of the logarithm of the Carlitz-Tate twist, and proved that each entry is expressed as a linear combination of the the logarithmic-type hypergeometric functions. (3) I defined the motivic logarithmic-type hypergeometric function for the Carlitz modules, and gave a necessary and sufficient condition for special values of logarithmic-type hypergeometric functions at algebraic points to be algebraic.

研究分野：有限体上の関数体の塔

キーワード：超特異多項式　指数型超幾何関数　対数型超幾何関数　ドリンフェルト加群　モチーフ　周期解釈　ポリログ

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

一般化された超幾何関数（= 古典的超幾何関数）は欠かすことができないもので，特殊関数たちの「ボス」である．上段と下段のパラメータの個数をそれぞれ A と B とすると，超幾何関数はパラメータが空（A=B=0）のとき指数関数，また A=B+1 かつ上段パラメータがぜんぶ 1 かつ下段パラメータがぜんぶ 2 のときポリログである．代数体の世界と関数体の世界はパラレルワールドである．つまり，代数体の世界の現象は関数体にも存在し，その逆も存在する．たとえば，ゼータ関数論はさきに代数体の世界で発見され，のちに関数体の世界で発見された．ヒルベルトの理論はその逆であった．超幾何関数は代数体の世界で重宝されているが，関数体の世界ではまだそれほどでもない．関数体版超幾何関数は 1995 年に Dinesh S. Thakur によってはじめて紹介された．この関数は Thakur の超幾何関数（= カーリッツ加群の指数型超幾何関数）とよばれ，古典的超幾何関数論とパラレルな現象がいろいろ発見されているが，まだ発見されていない現象もたくさんある．発見されていないものとして，たとえば，古典的超幾何関数はモジュロプライム還元すると超特異多項式（超特異ヤコビ多様体を勘定するもの）になることが知られているが，Thakur の超幾何関数はモジュロプライム還元しても超特異ドリンフェルト加群を勘定するものにはならない．研究開始当初は Thakur のものとは異なる関数体版超幾何関数で，モジュロプライム還元すると超特異ドリンフェルト加群を勘定するものが所望されていた．

２．研究の目的

夢は有理点をたくさんもつ曲線の全探究である．有限体上の曲線の有理点の個数には上限があり，上限に達する曲線を最大曲線という．最大曲線の商曲線はふたたび最大なので，最大曲線の「ボス」を探せばよい．フェルマー曲線は最大曲線のボスの一つであるが，それ以外のボスはあまり知られていない．つまり，ほとんどの知られている最大曲線はフェルマー曲線の商である．最大曲線を ad hoc に探すには無理があった．そこで，最大曲線の探索をいったん放棄し，できるだけたくさん有理点をもつ曲線の探索，つまり，有限体上のモジュラー曲線の漸近的最良塔を探索する．ここで，漸近的最良塔とは上階に進めば進むほど有理点の個数が増加する有限体上のモジュラー曲線の塔のことである．漸近的最良塔には二種類あり，一つは楕円モジュラー曲線の塔で，もう一つはドリンフェルト・モジュラー曲線の塔である．有理点の勘定は超特異点の勘定に帰着されるので，前者は超特異楕円曲線を勘定し，後者は超特異ドリンフェルト加群を勘定すればよい．楕円モジュラー曲線の塔は盛んに研究されており，古典的超幾何関数の変換公式を用いて超特異点が勘定できる．一方で，ドリンフェルト・モジュラー曲線の塔については超特異多項式に還元される超幾何関数がまだ発見されていないので，この方針が使えない．本研究の目的は，超特異多項式と関係する超幾何関数を定義し，その関数の理解を深めることである．

３．研究の方法

カッコ番号は「４．研究成果」にそろえてある．
(1)（論文①と②）正標数の世界は情報量が少ないので，標数零の世界にリフトアップして議論することが証明のキーである．実際には以下：有限体上の多項式をいったん整数環上に持ち上げ，整数環上の恒等式を用いて係数を整頓し，ふたたびモジュロプライム還元する．

(2) (3)（論文③）ドリンフェルトの指数関数（それぞれ，ドリンフェルトの対数関数）がみたす関数等式をヒントに，ドリンフェルト加群の指数型超幾何関数（それぞれ，ドリンフェルト加群の対数型超幾何関数）が，ある超幾何微分方程式をみたすことを示した．

(4)（論文④）行列係数の成分どうしの関係を，数学的帰納法を用いて証明した．

(5) (6) カーリッツ加群の対数型超幾何関数をモチビック化し，R. Harada のアイデアを指導原理に，Anderson-Brownawell-Papanikolas の結果（ABP 判定法）を用いて証明した．

４．研究成果

(1)（論文②）1941 年に Max Deuring は超特異楕円曲線を勘定する多項式（いわゆる超特異多項式）を明示的に与えた．現在ではもっと一般に超特異ヤコビ多様体を勘定する多項式系が研究されている．一方で，関数体の世界ではあまりこのような研究はなされていなかった．

われわれは低階数の超特異ドリンフェルト加群を勘定する多項式系を明示的に与えた．なお，この多項式はドリンフェルト加群の対数型超幾何関数のモジュロプライム還元である．

(2)（論文③）1995 年に Thakur はカーリッツ加群の指数型超幾何関数（= Thakur の超幾何関数）を紹介し，その収束半径を求めた．また，その関数が超幾何微分方程式をみたすことを示した．Thakur の超幾何関数はカーリッツの指数関数の一般化である．つまり，パラメータが空のときカーリッツの指数関数である．

　われわれは Thakur の結果を一般化した．つまり，任意階数のドリンフェルト加群の指数型超幾何関数を定義し，その関数が超幾何微分方程式をみたすことを証明した．われわれの指数型超幾何関数はパラメータが空のときドリンフェルトの指数関数である．

(3)（論文③）任意階数のドリンフェルト加群の対数型超幾何関数を定義し，その関数が超幾何微分方程式をみたすことを証明した．対数型超幾何関数はパラメータが空のときドリンフェルトの対数関数である．さらに，カーリッツ加群の対数型超幾何関数の収束半径を求めた．

　2005 年頃に Anatoly N. Kochubei はポリログ（= Kochubei のポリログ）を定義した．われわれのカーリッツ加群の対数型超幾何関数はパラメータを特殊化すると Kochubei のポリログになる．つまり，われわれのものは Kochubei のポリログを特殊化として含む．

(4)（論文④）カーリッツ加群の n 回テンソル積の指数関数および対数関数はどちらも n 次正方行列係数の級数である．n=1 のとき，それぞれカーリッツ加群の指数関数と対数関数である．1990 年に Greg W. Anderson と Thakur はカーリッツ加群の n 回テンソル積の指数関数の行列係数の第 1 列の成分を決定し，また，対数関数の行列係数の第 n 行の成分を決定した．

　われわれはカーリッツ加群の n 回テンソル積の指数関数の行列係数の全成分を決定し，各成分が Thakur の超幾何関数の一次結合で表示されることを示した．また，対数関数の行列係数の全成分を決定し，各成分がカーリッツ加群の対数型超幾何関数の一次結合で表示されることを示した．関数体版ポリログおよびその亜種について，代数点における特殊値が超越数となることを示した．証明には 1991 年の Jing Yu の部分空間定理を用いた．

(5) 古典的超幾何関数の例外集合（exceptional set）は盛んに研究されている．たとえば，モノドロミー群が数論的であるための必要十分条件は，例外集合が無限集合であることが知られている．ここで，関数の例外集合とは，代数点における特殊値がふたたび代数的数になる点全体のことである．指数関数およびベッセル関数の例外集合はどちらも 0 のみである．
　2011 年に Thakur-Wen-Yao-Zhao は A+1>B のとき Thakur の超幾何関数の例外集合を決定した．研究手法は関数体版超越数論に根ざしている．Harada は A+1=B のとき Thakur の超幾何関数の例外集合を決定した．手法は Thakur の超幾何関数をモチビック化し，ABP 判定法を用いた．

　われわれはカーリッツ加群のモチビック・対数型超幾何関数を定義した（カーリッツ加群の対数型超幾何関数をモチーフ化した）．つまり，モチビック・対数型超幾何関数で変数 t を特殊化 t= \theta すると，本来のカーリッツ加群の対数型超幾何関数になるものを定義した．また，カーリッツ加群の対数型超幾何関数の代数点における特殊値がふたたび代数的数であるための必要十分条件を与えた．実際には以下：カーリッツ加群の対数型超幾何関数の代数点における特殊値が代数的数であるための必要十分条件は，その関数のモチビック化が有理関数であらわされるときである．また，カーリッツ加群のモチビック・対数型超幾何関数が有理関数となるためのパラメータについての十分条件を与えた．さらに，有理関数となるパラメータの族および有理関数とはならないパラメータの族をそれぞれ与えた．

(6) カーリッツ加群のモチビック・対数型超幾何関数について以下のことを証明した．
・ テイト代数の元であることを示した．
・ 周期解釈（period interpretation）を与えた．
・ 零点をもたないことを示した．
また，本来のカーリッツ加群の対数型超幾何関数が 0 以外の零点をもたないことを示した．

< 引用文献 >
① Takehiro Hasegawa, A supersingular polynomial for rank-2 Drinfeld modules and applications, preprint.
② Takehiro Hasegawa, Remarks on a paper by El-Guindy and Papanikolas, Ramanujan Journal 53 (2020), no.1, 139-154.
③ Takehiro Hasegawa, Logarithmic-type and exponential-type hypergeometric functions for function fields, Journal of Number Theory 233 (2022), 87-111.
④ Takehiro Hasegawa, Explicit formulas for the exponential and logarithm of the Carlitz-Tate twist, and applications, preprint.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計4件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　0件）

1．著者名 Takehiro Hasegawa	4．巻 233
2．論文標題 Logarithmic-type and exponential-type hypergeometric functions for function fields	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Journal of Number Theory	6．最初と最後の頁 87--111
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2021.05.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Takehiro Hasegawa, Seiken Saito	4．巻 344
2．論文標題 A note on the moments of the Kesten distribution	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Discrete Mathematics	6．最初と最後の頁 10 pp.
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.disc.2021.112524	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Takehiro Hasegawa	4．巻 53
2．論文標題 Remarks on a paper by El-Guindy and Papanikolas	5．発行年 2020年
3．雑誌名 Ramanujan Journal	6．最初と最後の頁 139--154
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11139-019-00214-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1．著者名 Takehiro Hasegawa, Takashi Komatsu, Norio Konno, Hayato Saigo, Seiken Saito, Iwao Sato, Shingo Sugiyama	4．巻 27
2．論文標題 The Limit Theorem with Respect to the Matrices on Non-backtracking Paths of a Graph	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Annals of Combinatorics	6．最初と最後の頁 249--268
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00026-022-00617-z	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関