

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：17201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03404

研究課題名(和文) p進ラングランズ対応を用いた一般化岩澤主予想の解決へ向けて

研究課題名(英文) Applications of p-adic Langlands correspondence to Iwasawa main conjecture

研究代表者

中村 健太郎 (Nakamura, Kentaro)

佐賀大学・理工学部・准教授

研究者番号：90595993

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：p進局所ラングランズ対応における様々な理論を用いて、階数2の普遍変形に対するゼータ元を構成し、その応用として、合同な保型形式に対する岩澤主予想の成立が同値になるという結果も得られた。佐賀大学の石田哲也氏(博士後期課程所属)と共同で、ドラムな $(\phi, \Gamma)$ 加群に対する局所イプシロン予想の成立が、それに付随するp進微分方程式の構造を持つ $(\phi, \Gamma)$ 加群に対する同予想の成立と同値になるという定理を証明した。さらに、ゼータ元の構成の別方向への応用として、KIASのChan-Ho Kim氏と共同で、コールマン-メイザー固有値曲線上のp進L関数の構成を行なった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

現在発展中のp進ラングランズ対応の理論が岩澤主予想と深く関わっていることを発見した本研究は、p進ラングランズ対応と岩澤理論双方の分野において価値のあることであると認識している。また、その応用として得られた、合同な保型形式に対する岩澤主予想の同値性に関する定理は、pで超カスプ表現となる保型形式に対する岩澤主予想についてのおそらく初めての結果であり、岩澤主予想の研究分野において大変価値の結果であると思っている。

研究成果の概要(英文)：I studied the Iwasawa main conjecture, in particular, Kato's conjecture (the generalized Iwasawa main conjecture and the local epsilon conjecture). For the generalized Iwasawa main conjecture, I constructed zeta morphisms for rank two universal deformations using several theories in p-adic Langlands correspondence. As an application of it, I could prove a theorem which states that Iwasawa main conjecture for a modular form holds if the conjecture for a congruent modular holds. For the local epsilon conjecture, I proved a theorem which states that the local epsilon conjecture for a de Rham  $(\phi, \Gamma)$ -module holds if the conjecture for its associated p-adic differential equation holds (this is a joint work with Tetsuya Ishida (Saga Univ)). As another application of zeta morphism, I constructed the p-adic L-function over the Coleman-Mazur eigen curve (this is a joint work with Chan-Ho Kim (KIAS)).

研究分野：整数論

キーワード：岩澤主予想 p進ラングランズ対応 局所イプシロン予想 p進ガロア表現

## 1. 研究開始当初の背景

岩澤主予想とラングランズ予想は整数論における重要な未解決予想である。私はラングランズ対応の  $p$  進版である  $p$  進ラングランズ対応と呼ばれる理論に特に興味を持ち、これまでの研究において、加藤和也氏が 90 年代頃に提唱した岩澤主予想の一般化に関する予想（一般化岩澤主予想、局所イプシロン予想）と  $p$  進ラングランズ対応の間に非常に深い関係があることを明らかにしてきた。特に、モジュラー曲線の完備コホモロジーによる  $p$  進ラングランズ対応の幾何学的実現（エマートンの理論）を用いれば、階数 2 の普遍変形に対してゼータ元が構成できるところまでわかってきており、 $p$  進局所ラングランズ対応の様々な理論を用いることで、このゼータ元が、保型形式に対する加藤のゼータ元を補間するものである、というところまでの証明のおおよその道筋は得られていた。このゼータ元を用いれば、 $p$  で超カスプ表現の場合の岩澤主予想への応用があるはずだと臆げに思い描いていたが、それについての具体的なアイデアはまだなかった、というのが研究開始当初の状況である。

## 2. 研究の目的

$p$  進ラングランズ対応の幾何学的実現を用いた階数 2 の普遍変形のゼータ元の構成とその証明の細部を完全に詰めて、論文を完成させること、さらには普遍変形のゼータ元の応用として、岩澤主予想と関連する問題へと応用することが研究開始時の目的であった。特に、 $p$  で超カスプ表現となる保型形式に対する岩澤主予想の成立については、これまでに知られた結果がなく、普遍変形のゼータ元の応用として、この場合の岩澤主予想について何らかの結果を得ることを研究目標の一つとしていた。

## 3. 研究の方法

加藤のゼータ元はモチーフに起源を持つ大変精密な対象であり、これに関して正確な結果を得るためには、ゼータ元の構成に現れる様々な選択に依存する項の正確な計算や、モジュラー曲線のコホモロジーに現れる様々な作用の計算が必要となる。特に、我々の研究においては、加藤和也氏の様々な定義を、エマートンの完備コホモロジーの枠組みで再構成する必要があったため、両者の理論の両立性を逐一チェックすることが論文執筆において必要になった。これに予想以上に時間がかかってしまったが、無事に細部の計算の確認を全て完了させることができ、普遍変形のゼータ元の構成の論文を完成させることができた。また、論文完成時に、ゼータ元の合同による岩澤主予想の同値性に関するプレプリントの存在を知り、この手法を我々の普遍変形のゼータ元を組み合わせることで、岩澤主予想への応用が得られることに気付いた。また、別種の応用として、普遍変形上のゼータ元をコールマン・メイザー固有値曲線に制限することで、固有値曲線上のゼータ元も得られる。さらにこれまでに行なった階数 1 の場合の局所イプシロン予想の結果を用いて、固有値曲線上のガロア表現の族に対して Perrin-Riou 理論が拡張することで、固有値曲線上の  $p$  進  $L$  関数を構成した。また、我々がこれまでに研究してきたドラム  $(\phi, \Gamma)$  加群に対する Perrin-Riou 理論の一般化（特に、Big exponential の理論および  $\delta(V)$  定理の一般化）をさらに発展させることで、任意のドラム  $(\phi, \Gamma)$  加群に対して、その局所イプシロン予想を、付随する  $p$  進微分方程式に対する局所イプシロン予想に帰着することができた。

## 4. 研究成果

階数 2 のゼータ元の構成およびその応用として得られる合同な保型形式に対する岩澤主予想の同値性定理に関する論文を完成させた。任意のドラム  $(\phi, \Gamma)$  加群に対して、その局所イプシロン予想の成立が、付随する  $p$  進微分方程式に対する局所イプシロン予想の成立と同値であるという定理を証明し、それに関する論文を完成させた（佐賀大学 石田哲也氏との共同研究）。コールマン・メイザー固有値曲線上にゼータ元を構成し、さらにコールマン・メイザー固有値曲線上のガロア表現に対して Perrin-Riou 理論を拡張すること

で、コールマン・メイザー固有値曲線上の  $p$  進  $L$  関数を構成した。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kentaro Nakamura	4. 巻 2204
2. 論文標題 Zeta morphisms for rank two deformations	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku No.2204	6. 最初と最後の頁 1-10
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Chan-Ho Kim, Kentaro Nakamura	4. 巻 210
2. 論文標題 Remarks on Kato's Euler systems for elliptic curves with additive reduction	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 249-279
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jnt.2019.09.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 8件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 中村 健太郎
2. 発表標題 p進ラングランズ対応と岩澤予想について
3. 学会等名 慶應義塾大学集中講義（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中村 健太郎
2. 発表標題 Coleman-Mazur 固有曲線上の $p$ 進 $L$ 関数について
3. 学会等名 慶應義塾大学坂内健一研究室プロジェクト研究集会2021（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中村 健太郎
2. 発表標題 Coleman-Mazur 固有曲線上の $p$ -進 $L$ -関数
3. 学会等名 数論幾何研究報告会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中村 健太郎
2. 発表標題 ゼータ元の合同と岩澤主予想への応用
3. 学会等名 RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kentaro Nakamura
2. 発表標題 Zeta morphisms for rank two universal deformations
3. 学会等名 RIMS conference “Automorphic forms, Automorphic representations, Galois representations, and its related topics” (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中村健太郎
2. 発表標題 $GL_{\{2/Q\}}$ の $p$ -進Langlands対応と岩澤主予想
3. 学会等名 集中講義(東京大学)(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 中村健太郎
2. 発表標題 p進ラングランズ対応と岩澤予想について
3. 学会等名 大阪大学集中講義 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中村健太郎
2. 発表標題 Coleman-Mazur 固有曲線上の p 進 L 関数
3. 学会等名 RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺」(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 中村健太郎
2. 発表標題 Zeta morphisms for rank two universal deformations
3. 学会等名 Shou Wu Zhang's 60th birthday conference Shimura Varieties And L-Functions(MSRI) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 中村健太郎
2. 発表標題 Construction of p-adic L-function over the Coleman-Mazur eigencurve
3. 学会等名 Algebraic and Analytic Aspects of L-functions UNIST BRL conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------