

令和 5 年 5 月 27 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03407

研究課題名(和文) 保型L函数の特殊値と周期

研究課題名(英文) Special values of automorphic L-functions and periods

研究代表者

古澤 昌秋 (FURUSAWA, Masaaki)

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50294525

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：Boechererは1980年代の中頃に、ヘッケ作用素の同時固有函数である次数2のジエゲル尖点形式について、虚2次体のイデアル類群と対応するフーリエ係数の有限和とその虚2次体に対応する2次指標で捻ったスピノルL函数の中心特殊値を結びつける予想を定式化した。この予想には多くの専門家が興味を持ったが、永らく未解決であった。神戸大学の森本和輝との共同研究によって、我々はベッヘラーの予想を証明することができた。さらに我々は、Boecherer予想の、フーリエ係数にイデアル類群の指標による重みをつけた有限和への一般化についても証明に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

数論的に定義されたL函数の特殊値は、対応する数論的対象の重要な情報を含んでいると予想されている。特に函数等式の中心における特殊値は、Birch & Swinnerton-Dyer予想及びその一般化にみられるように、興味深い。本研究の成果である一般化されたBoecherer予想は、 $GL(2)$ に関するWaldspurgerの定理の自然な一般化であり、Waldspurgerの定理がこれまでに、楕円曲線及び $GL(2)$ の保型形式の数論に、重要な応用をもたらしたように、今後、アーベル曲面及び $GSp(2)$ の保型形式の数論への様々な応用が期待できる。本研究の研究成果の学術的意義は大きい。

研究成果の概要(英文)：Boecherer proclaimed a conjecture concerning degree two Siegel cusp forms which are Hecke eigenforms in the mid 1980's, which was about a relationship between a finite sum over an ideal class group of an imaginary quadratic field of Fourier coefficients and the central value of the spinor L-function twisted by a quadratic character corresponding to the imaginary quadratic field. Many specialists were interested in it but it remained unsolved for a long time. In a joint work with Kazuki Morimoto at Kobe University, we proved the original conjecture. Moreover we proved its generalization to the case corresponding to a finite sum of Fourier coefficients weighted by a character of the ideal class group.

研究分野：保型L函数

キーワード：保型L函数 L函数の特殊値 テータ対応

1. 研究開始当初の背景

大まかな表現であるが、数論的なゼータ関数は適当な保型 L 関数によって記述されるというのが、現代の数論の基本的な考え方の一つとされている、Langlands 哲学である。そして、Bloch-加藤予想、Beilinson 予想のように、現代の数論の基本的な作業仮説は、数論的なゼータ関数の特殊値は対応する数論的な対象の不変量を表している、というものである。これら 2 つの基本原則を組み合わせるならば、保型 L 関数の特殊値を研究することの重要性に行き着く。

保型 L 関数とは保型形式に対して定義されるものであるから、保型 L 関数の特殊値は保型形式の不変量と関係すると考えるのは当然のことである。実際、楕円保型形式の場合には、保型形式のトラス上の積分が保型 L 関数の中心特殊値と関係することが、Waldspurger の定理として知られている。Waldspurger の定理は楕円保型形式の研究だけにとどまらず、modularity theorem によって、楕円曲線と結びつくことによって、楕円曲線に関する様々な深い定理をもたらしてきた。

楕円保型形式の次に考える対象の一つとして、次数 2 の Siegel 保型形式がある。対応する代数群は $\mathrm{GSp}(2)$ である。Andrianov がスピノル L 関数の積分表示を発見し、解析接続や函数等式を証明して以来、盛んに研究されてきた。1980 年代中頃に Boecherer が Hecke 固有形式のある種の Fourier 係数の有限和とスピノル L 関数の 2 次指標による twist の中心特殊値の関係についての予想を提唱した。多くの専門家が関心を寄せたが、予想は長い間未解決のままであった。

一方、Gross-Prasad は 1990 年代前半に、直交群の保型形式について、保型形式の周期と保型 L 関数の中心特殊値の関係についての予想を提唱した。さらに 2000 年代後半に市野-池田は、Gross-Prasad 予想を精密化し、中心特殊値の保型形式の周期による明示公式を定式化する、画期的な予想を提唱した。PGSp(2) と SO(5) の間の同型により、Boecherer 予想はより大きな枠組みの精密化された Gross-Prasad 予想の一つの場合として捉えられることになった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、Boecherer 予想を証明すると共に、イデアル類群の非自明な指標の場合への一般化された予想を証明することである。

3. 研究の方法

古澤は、1990 年頃に Boecherer 予想を本人から口頭で聞き、興味を持った。Boecherer 予想は、GL(2) に関する Waldspurger の定理の $\mathrm{GSp}(2)$ への一般化と考えられるものであることを認識した。そこで、Waldspurger の証明にならい、テータ対応の理論の文脈で Boecherer 予想を考察した。奇数次元の 2 次形式の直交群と同階数の metaplectic 群の間のテータ対応に L 関数の中心特殊値が現れることに気づき、その結果を Crelle Journal に公刊した。しかし、当時はテータ対応の基本理論の重要問題の多くが未解決であり、その方向でさらに研究を進めることは難しかった。

Waldspurger の定理の証明には、テータ対応を用いた原証明だけでなく、Jacquet による相対跡公式による別証明が 1980 年代後半に発見されていた。1995 年頃から Joseph Shalika との共同研究として、相対跡公式による Boecherer 予想へのアプローチの考察を開始した。Jacquet は Waldspurger の定理について、2 つの相対跡公式を発見したが、我々もそれらの一般化である 2 つの相対跡公式を定式化し、Hecke 環の単位元に関する基本補題を証明した。2000 年代になってからは、Kimball Martin も加わり、Erez Lapid の示唆に基づく第 3 の相対跡公式も定式化し、第 1、第 3 の相対跡公式に関する基本補題を Hecke 環全体に拡張した。しかし、研究を更に進めるためには、解析的な困難を克服しなければならず、研究は停滞してしまった。

一方、Gan-武田による Howe 予想の完全解決、山名による doubling method の完成及びその帰結を始めとして、テータ対応の基礎理論には近年目覚ましい発展があった。また、市野-池田による、精密化された Gross-Prasad 予想の定式化によって、保型 L 関数の特殊値の保型形式の周期による明示公式への革命的なアプローチがもたらされた。これらの進展を踏まえて、神戸大学の森本和輝との共同研究として、テータ対応による Boecherer 予想へのアプローチについて、2015 年の秋頃から再考を開始した。一方、Dickson-Pitale-Saha-Schmidt によって、Gross-Prasad 予想の (SO(5), SO(2)) の場合の市野-池田タイプの精密化から Boecherer 予想が従うことが示された。よって、市野-池田タイプの明示公式を示すことが研究の目標となった。

再考察を開始して間もなく、前述の Crelle の論文におけるテータ対応による Whittaker 周期の引き戻しの計算から、Gross-Prasad 予想の一方向が、(SO(2n+1), SO(2)) で SO(2) の指標が自明の場合に証明することができ、その論文は 2017 年に Mathematische Annalen に出版された。さらに、Whittaker 周期の引き戻しの計算に、Lapid-Mao による metaplectic 群

上の保型形式の Whittaker 周期と随伴 L 関数の 1 での値の関係についての明示公式、Gan-武田による奇数次元の 2 次形式の直交群と metaplectic 群の間のテータ対応に関する Siegel-Weil 公式を組み合わせることによって、 $(SO(2n+1), SO(2))$ で $SO(2)$ の指標が自明の場合に、市野-池田タイプの明示公式を示すことができた。そして、これの $n=2$ の場合から、Boecherer 予想を証明することができた。

次に、指標が自明とは限らない場合に、 $(SO(5), SO(2))$ についての市野-池田タイプの明示公式を考察した。上述の直交群と metaplectic 群の間のテータ対応では、必然的に指標は自明とならねばならず、新しい枠組みを考える必要がある。森本の卓越したアイデアによって、similitude 群の間のテータ対応及び四元数環上のユニタリ群の間のテータ対応をいくつか組み合わせることによって、困難を克服することができた。

4 . 研究成果

指標が自明な場合の $(SO(2n+1), SO(2))$ の Gross-Prasad 予想の精密化及びその系としての Boecherer 予想の証明の論文は、2021 年に Journal of the European Mathematical Society (JEMS) に公刊された。この論文は、University of Bonn の Valentin Blomer が彼の論文 (JEMS 2019) の中で、“breakthrough paper of Furusawa and Morimoto” と引用しているように、高く評価された。この論文を含む業績に対して、古澤には 2022 年度日本数学会代数学賞が与えられた。

指標が自明とは限らない場合については論文が完成し、preprint 版は arXiv において閲覧可能となっている。現在、国際学術誌に投稿され、査読を受けているところである。また、この論文と並行して、 $(U(2n), U(1))$ の場合の精密化された Gross-Prasad 予想に関する論文も完成し、これも国際学術誌に投稿され、査読受審中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Furusawa Masaaki, Morimoto Kazuki	4. 巻 23
2. 論文標題 Refined global Gross-Prasad conjecture on special Bessel periods and Boecherer's conjecture	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1295 ~ 1331
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JEMS/1034	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 5件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Masaaki Furusawa
2. 発表標題 On Boecherer's conjecture
3. 学会等名 POSTECH PMI-BRL Number Theory Seminar（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 古澤昌秋
2. 発表標題 ($S_0(5)$, $S_0(2)$)に対するGross-Prasad予想とその精密化および一般化されたBoecherer予想について
3. 学会等名 2022年度日本数学会年会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masaaki Furusawa
2. 発表標題 On Boecherer's conjecture
3. 学会等名 Modular Forms on Higher Rank Groups（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masaaki Furusawa
2. 発表標題 On a certain Ichino-Ikeda type formula and the generalizd Boecherer conjecture
3. 学会等名 Conference on Special Values of L-functions (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 古澤昌秋
2. 発表標題 ある市野-池田型公式と一般化されたベッヘラー予想について
3. 学会等名 保型形式と数論－池田保先生還暦記念集会－(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------