

令和 5 年 6 月 15 日現在

機関番号：32657

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03410

研究課題名(和文) 双曲3次元多様体のSL₂指標多様体とそのゼータ関数の研究研究課題名(英文) Research on SL₂ character varieties of hyperbolic 3-manifolds and their zeta functions

研究代表者

原田 新也 (HARADA, Shinya)

東京電機大学・工学部・助教

研究者番号：40763892

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：研究課題名にある双曲3次元多様体の中でも、基本的な対象である数論的な2橋絡み目について、そのSL₂指標多様体のひとつの特徴づけを与え、その研究内容に関する論文を査読付き論文として論文誌に掲載した。
また本研究テーマに関する研究の現状を報告した講演の報告集原稿をまとめ、査読付き論文として研究集会の論文誌に掲載した。その報告集の中で紹介している、双曲3次元多様体の中でも最も基本的な場合である閉双曲3次元多様体の場合に関する論文については、まだ論文投稿段階である。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究課題名にある双曲3次元多様体のSL₂指標多様体は重要な研究対象であるが、その性質や構造については分かっていないことが多い。本研究は数論的な2橋絡み目という、具体的な対象に対してではあるが、一般にはどのような構造になるかすらわかっていない指標多様体の形を記述する成果である。また既存の研究方法では扱えなかった、複雑な2橋絡み目の場合にも適用できた点は意義深いものだと考える。これによって一般の場合の形について一つの示唆を与えることができた。

研究成果の概要(英文)：We have given a characterization of the SL₂ character varieties of arithmetic two-bridge links which are one of the most fundamental objects among hyperbolic 3-manifolds. The research paper is already published as a peer-reviewed article in a mathematical journal.

We also have published a peer-reviewed article which is a survey paper for this research project.

研究分野：数論的トポロジー

キーワード：指標多様体 双曲3次元多様体 ゼータ関数 特殊値

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

結び目、あやとりの紐が描くような図形ですが、これらを調べるためにその補空間を考えることが数学ではよくあります。

結び目そのものは紐なので1次元ですが、補空間とはその外側の空間部分なので、補空間は3次元です。複数の結び目を同時に考える場合は、それらをひとまとめとして絡み目と呼びます。やはり絡み目の補空間も3次元です。これらの補空間が本研究課題名にある(双曲)3次元多様体の典型例です。

3次元多様体を調べるためにも、やはり他の間接的な対象を考えることがよくあります。そのひとつが研究課題名にある SL_2 指標多様体ということになります。語尾が同じことから推察されるように、指標多様体もやはり図形ではありますが、こちらは方程式たちの解で定まるような代数的な図形です。1次元の場合ならば直線、放物線、双曲線などがこれに当たります。3次元多様体を調べるための一つの手段として、それらが定める指標多様体が調べられてきました。指標多様体は代数多様体と呼ばれるものの一部ですが、この代数多様体とそれが定めるゼータ関数という関数があります。ゼータ関数はいろいろな種類がありますが、ここでいうゼータ関数は、一点からなる図形のゼータ関数がリーマンゼータ関数と呼ばれるオリジナルのゼータ関数になるように、代数多様体の場合に拡張した概念になります。近年代数多様体とそのゼータ関数についても研究が進展していますが、まだまだ一般に調べるための手法がほぼない対象です。

2. 研究の目的

一般に SL_2 指標多様体やそのゼータ関数も、具体的にその構造を決定するのは難しい問題です。結び目補空間や絡み目補空間の SL_2 指標多様体に関しては、結び目、絡み目の形から、それらの指標多様体の具体的な定義方程式を求める方法がありますが、それらの SL_2 指標多様体の代数多様体としての性質はやはりあまり分かっていません。

本研究課題の目標としては、3次元多様体としての結び目・絡み目の関係性から、それらの SL_2 指標多様体、ひいてはそれらのゼータ関数の新しい関係性を調べようというものでした。

そのために、本研究計画前の研究で得られていた成果をさらに発展させ、それらを応用して研究を進めるという流れです。本研究計画前に行っていた研究により、最も基本的な場合である閉双曲3次元多様体の場合、また結び目の中でも最も基本的な場合である8の字結び目の場合、また絡み目の中で基本的な数論的2橋絡み目の場合に一定の成果を挙げていました。それらの結果を発展、応用することで上記の関係性を調べようとする計画でした。

3. 研究の方法

3次元多様体論では、デーン手術と呼ばれる、元の3次元多様体から別の3次元多様体を構成する手法があります。これによって、例えば2つの結び目からなる絡み目の補空間の中の、結び目による穴の一方をうまくふさぐことによって、全く別の3次元多様体になったりします。ポイントはこの操作による2つの多様体の関係性が比較的良く分かっているということです。

そのことを利用して、もともとの3次元多様体と、デーン手術により変化した新しい3次元多様体間の関係性を基にして、それらの指標多様体やゼータ関数の関係性を調べようという計画でした。具体的には例えば、デーン手術により8の字結び目の場合と閉双曲3次元多様体の場合、数論的2橋絡み目の場合と結び目（特に8の字結び目）の場合が関係性を持ちます。研究の目的で触れましたが、既に研究計画段階で、閉双曲3次元多様体の場合、8の字結び目の場合、そして数論的2橋絡み目の場合において、指標多様体やゼータ関数の形についてある程度の結果を得ていました。それらの結果と、デーン手術による関係性を利用して、指標多様体の関係性、そしてゼータ関数の関係性を調べようというものでした。

4. 研究成果

結果としては、コロナ禍になったことも大きいですが、研究のための時間を確保することができず、当初計画していた上記の新しい研究を行うことが（特に半ばの2年）ほとんどできずに終わってしまいました。そのため、事前研究としてある程度出来上がっていた研究成果の部分を、正式な結果として論文誌に載せることをメインに行うことになりました。成果としては2つあります。一つは本研究課題のテーマに関係して研究集会における招待講演を行っていましたが、その報告集を兼ねた論文誌のための原稿を完成し、専門家による査読を済ませ掲載まで行ったことです。併せてこの報告集原稿の中で扱っている、双曲3次元多様体の中でも最も基本的な場合である、閉双曲3次元多様体の場合の結果についての論文も投稿しています。（こちらはまだ論文誌に掲載されていません。）もう一つは、双曲3次元多様体の中でも基本的な対象である数論的2橋絡み目の場合の指標多様体の特徴づけに関する論文を査読ののち論文誌へ掲載したことです。近い対象に関する同様の研究が、すでに海外の研究者により行われていましたが、本研究はそれを別の対象である数論的2橋絡み目の場合に、別の研究方法により行ったものです。別の研究方法を用いたメリットとしては、既存の方法では扱えていない、より複雑な2橋絡み目に関しても成果を上げることができました。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Shinya Harada	4. 巻 9
2. 論文標題 Canonical components of character varieties of arithmetic two-bridge link complements	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-023-00640-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shinya Harada	4. 巻 -
2. 論文標題 Hasse-Weil zeta functions of character varieties of hyperbolic 3-manifolds	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 B83 Algebraic Number Theory and Related Topics 2017	6. 最初と最後の頁 3-10
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------