

令和 6 年 6 月 4 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03415

研究課題名(和文) EW加群におけるDemazure加群の半無限LSパスを用いた研究と幾何的応用

研究課題名(英文) Study of Demazure modules in EW modules in terms of semi-infinite LS paths and its geometric application

研究代表者

佐垣 大輔 (Sagaki, Daisuke)

筑波大学・数理物質系・教授

研究者番号：40344866

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：(1) C.Lenart氏と内藤聡氏との共同研究で、任意の整ウェイトについての Chevalley 型の展開公式を与えた。(2) 河野隆史氏、内藤氏、D.Orr氏との共同研究で、simply-laced なリー代数の一般の minuscule ウェイトに対する逆 Chevalley 公式を証明した。さらに、Lenart 氏、内藤氏、Orr 氏との共同研究で、これを一般の整ウェイトの場合に拡張した。(3) 内藤聡氏との共同研究で、量子 Grothendieck 多項式の Pieri 型の公式を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

結合代数とその「良い」基底が与えられたときに、その基底に関する構造定数を決定するという問題が最も基本的で重要な問題である。「研究成果の概要」で述べた各公式は、半無限旗多様体のK群や、旗多様体の量子K群における構造定数を決定しており、その重要性は明らかである。実際に、科研費 23K03045 において、これらの公式を応用した研究をすでに始めている。また、量子 Grothendieck 多項式の Pieri 型の公式については、対称群と多項式という比較的易しいものを用いて記述されている。高校生や大学1年生などに解説して、数学に興味を持ってもらうきっかけになれば良いと考える。

研究成果の概要(英文)：(1) In a joint work with C.Lenart and S.Naito, we gave a Chevalley type formula for arbitrary integral weight. (2) In a joint work with T.Kouno, S.Naito, and D.Orr, we gave an inverse Chevalley type formula for a general minuscule weight of a simply-laced simple Lie algebra. Then, in a joint work with C. Lenart, S.Naito, and D.Orr, we generalized the inverse Chevalley type formula to the case of a general integral weight. (3) In a joint work with S.Naito, we gave a Pieri type formula of quantum Grothendieck polynomials.

研究分野：リー代数、量子群の組み合わせ論的表現論

キーワード：量子アフィン代数 結晶基底 エクストリーマル・ウェイト加群 半無限LSパス 量子LSパス Demazure加群 量子alcove模型 量子 Grothendieck 多項式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

エクストリーマル・ウェイト (EW) 加群は、可積分最高ウェイト加群の自然な一般化として 柏原正樹 (1994) によって導入された、量子群 (量子普遍展開環) $U=U(q)$ 上の可積分な加群である; 柏原 (1994) は、EW 加群が結晶基底と呼ばれる「量子群のパラメータ q が 0 のときの基底」を持つことも証明している。その後、柏原 (2002) は、量子アフィン代数上の「レベル・ゼロ」EW 加群とその結晶基底を詳細に調べ、レベル・ゼロ基本ウェイトに付随した EW 加群の商加群として Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群と呼ばれる (次数作用素抜きの) 量子アフィン代数 $A=A(q)$ 上の有限次元既約加群が得られること、および、KR 加群の結晶基底が EW 加群の結晶基底から誘導されることを証明した。KR 加群は単に表現論だけではなく、可解格子モデルにおける $X=M$ 予想、籠多様体、旗多様体の量子 K-理論、Macdonald 多項式、 q -Whittaker 関数など、数理論理学、幾何学、組み合わせ論とも密接に関係している。それに伴い、EW 加群にも、柏原による発見以降、現在に至るまで、多くの研究者が注目している。

ここからは、量子アフィン代数 $A=A(q)$ のレベル・ゼロ EW 加群のみを考える。EW 加群の構造を組合せ論的に調べる方法の 1 つとして、結晶基底の構造を調べる方法があるが、そのためには結晶基底がより組み合わせ論的なものを用いて実現されている必要がある。研究代表者は、石井基裕氏、内藤聡氏との共同研究 (2016) で、半無限 Bruhat 順序 (Lusztig のジェネリック Bruhat 順序) を用いて半無限 Lakshmibai-Seshadri (LS) パスを新たに導入し、それらのなす集合 (正確にはクリスタル) が EW 加群の結晶基底を実現していることを証明した。

さて、 $B=B(q)$ を $A=A(q)$ の「負の部分」(もしくは「下三角部分」) とする。本研究の主な研究対象の 1 つである EW 加群における Demazure 加群とは、アフィン・ワイル群の各元 x に対して、対応する EW ベクトル $v(x)$ で生成される B-加群 $Bv(x)$ のことである; 柏原 (2005) により、EW 加群の結晶基底の部分集合で、Demazure 加群の結晶基底になるものの存在が証明されている。私は、内藤氏との共同研究で、この Demazure 加群の結晶基底を実現する半無限 LS パスのなすクリスタルの部分集合を具体的に記述した。

Demazure 加群を考える理由の 1 つは、その次数付き指標 (graded character) を定義できることである。内藤氏や C.Lenart 氏、A.Schilling 氏、M. Shimozono 氏らとのいくつかの共同研究によって、Demazure 加群やその商加群の次数付き指標と Macdonald 多項式の特異化との関係を示した。また、加藤周氏、内藤氏との共同研究 (2020) で、Chevalley 型の公式を証明した。これは、 μ をレベル・ゼロ優整ウェイトとしたとき、 μ を通る Weyl 群軌道の元を EW とする Demazure 加群の次数付き指標を、 μ を通る Weyl 群軌道の元を EW とする Demazure 加群の次数付き指標の (一般には無限和の) $Z[P][1/q]$ -線形結合で表す公式であり、上述の半無限 LS パスを用いて記述される。ここで、 Z は整数全体の集合、 P は整ウェイト格子、 q は変数である。さらに μ が反優整ウェイトの場合にも Chevalley 型の公式を与えている (D.Orr 氏、内藤氏との共同研究 (2021))。

次に本研究の幾何学的背景を述べる。 G を連結かつ単連結な単純代数群とする。量子アフィン代数 $A=A(q)$ は G のリー代数の (ねじれの無い) アフィン化に付随するものとする。加藤氏、内藤氏との共同研究 (2020) において、半無限旗多様体 $Q=Q(e)$ (e はアフィン・ワイル群の単位元) および半無限 Schubert 多様体 $Q(x)$ を導入し、岩堀部分群 I に関する同変 K -群 $K'(Q)$ の定義を与えた。そして、上述の Chevalley 型公式の幾何的応用として、 $K'(Q)$ における Chevalley 型公式を与えた。すなわち、 $[\mu]$ をレベル・ゼロ優整 (または、反優整) ウェイト μ に付随した Q 上の線束のクラス、 $[x]$ を半無限 Schubert 多様体 $Q(y)$ の構造層のクラスとしたとき、テンソル積 $[\mu] \cdot [x]$ を半無限 Schubert 多様体の構造層のクラスの (一般には無限和の) $Z[P][1/q]$ -線形結合で表す公式を与えた。さらに、その応用として、単純鏡映 s とアフィン・ワイル群の元 x に対して、積 $[s] \cdot [x]$ の展開公式を与えた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、「半無限 LS パスを用いて EW 加群における Demazure 加群の構造を組み合わせ論的に研究し、その応用として、半無限旗多様体の同変 K -群、旗多様体の同変 (小) 量子 K -群、アフィン・グラスマン多様体の同変 K -群に関する種々の問題にアプローチする」ことにある。より具体的には、背景で述べたことから自然に発生する以下の問題を扱う。

問題 1 .Demazure 加群の次数付き指標に関する Chevalley 公式を μ が一般の整ウェイトの場合に拡張せよ。

問題 2 .一般のアフィン・ワイル群の元 x, y について、積 $[y] \cdot [x]$ の展開公式を与えよ。

問題 3 .これらの公式や半無限 LS パスを用いて、半無限旗多様体の同変 K -群と密接な関係のある旗多様体の同変 (小) 量子 K -群やアフィン・グラスマン多様体の同変 K -群に関する様々

な予想を解決できないだろうか？例えば、旗多様体の量子 K-群における量子 Bruhat 作用素を用いた Chevalley 公式に関する予想 (Lenart-Postnikov 2007) や、(問題 2 と関連するが) 量子 Grothendieck 多項式に関する Pieri 型の公式 (Lenart-Maeno 2006; 量子 Grothendieck 多項式の積を量子 Grothendieck 多項式の線形結合で展開する公式) の証明などである。

3. 研究の方法

もちろん、Weyl 群や対称群に関する様々な定理も駆使するが、特に強調したいのは半無限 LS パスを用いる点である。半無限 LS パスは単に組み合わせ論的对象というだけではなく、EW 加群や Demazure 加群の表現論的な性質を強く反映している。上述の加藤氏、内藤氏との共同研究では、この構造に注目して半無限標準単項式理論を新たに導入し、Chevalley 型の公式を証明した。このように半無限 LS パスのもつクリスタル構造は強力な武器であるのだが、この構造に注目した研究は未だ十分にはされていない。

なお、半無限 LS パスや半無限 Bruhat 順序の計算では、必要に応じて、Sage (フリーソフト) を用いることも考えている。多くの計算結果を基に予想をたて、それを証明する。

4. 研究成果

(2019 年度) C.Lenart 氏と内藤聡氏との共同研究で、任意の整ウェイト μ についての Chevalley 型の展開公式を証明した。また、その応用として、任意の整ウェイトについて $[\mu] \cdot [x]$ (x はアフィン・ワイル群の元) の組み合わせ論的な展開公式が得られた。

(2020 年度) Lenart 氏と内藤氏との共同研究で、Lenart と Postnikov (2007) によって予想された「旗多様体の量子 K-群における、量子 Bruhat 作用素を用いた Chevalley 型の公式」を証明した。また、河野隆史氏、Orr 氏、内藤氏との共同研究で simply-laced なリー代数の minuscule ウェイトに関する逆 Chevalley 公式を証明した。

(2021 年度) Lenart 氏、内藤氏、Orr 氏との共同研究で、上記の逆 Chevalley 公式を一般の整ウェイトの場合に拡張した。

(2022 年度) 内藤氏との共同研究で、ある巡回置換に対応する量子 Grothendieck 多項式と、一般の元に対応する量子 Grothendieck 多項式の積を、量子 Grothendieck 多項式の線形結合で展開する (Pieri 鎖を用いた) 組み合わせ論的な公式を証明した。この公式は Lenart 氏と前野俊昭氏の共同研究 (2006) によって予想され、長年未解決だったものである。

(2023 年度; 期間延長) 2022 年度に証明した量子 Grothendieck 多項式に関する Pieri 型の公式の同変版に関する研究を行い、いくつかの新たな予想をたてた。また、前野氏、内藤氏との共同研究で、ワイル群の最長元に関する半無限 Schubert 多様体の構造層のクラスを、基本ウェイトのワイル群軌道に含まれる整ウェイトに付随する線束のクラスの $Z[P]$ -線形結合で展開する公式を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 5件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Lenart Cristian, Naito Satoshi, Sagaki Daisuke	4. 巻 30
2. 論文標題 A general Chevalley formula for semi-infinite flag manifolds and quantum K-theory	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Selecta Mathematica	6. 最初と最後の頁 44 pp.
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-024-00924-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kouno Takafumi, Lenart Cristian, Naito Satoshi, Sagaki Daisuke	4. 巻 645
2. 論文標題 Quantum K-theory Chevalley formulas in the parabolic case	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 1 -- 53
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2024.01.026	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Lenart Cristian, Naito Satoshi, Orr Daniel, Sagaki Daisuke	4. 巻 423
2. 論文標題 Inverse K-Chevalley formulas for semi-infinite flag manifolds, II: Arbitrary weights in ADE type	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 109037
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2023.109037	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Kouno, S. Naito, and D. Sagaki	4. 巻 192
2. 論文標題 Chevalley formula for anti-dominant minuscule fundamental weights in the equivariant quantum K-group of partial flag manifolds	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 105670
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jcta.2022.105670	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Naito, D. Orr, D. Sagaki	4. 巻 387
2. 論文標題 Chevalley formula for anti-dominant weights in the equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 59 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2021.107828	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 T. Kouno, S. Naito, D. Orr, D. Sagaki	4. 巻 9
2. 論文標題 Inverse K-Chevalley formulas for semi-infinite flag manifolds, I: minuscule weights in ADE type	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum of Mathematics, Sigma	6. 最初と最後の頁 25 pp.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/fms.2021.45	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kato Syu, Naito Satoshi, Sagaki Daisuke	4. 巻 169
2. 論文標題 Equivariant K-theory of semi-infinite flag manifolds and the Pieri-Chevalley formula	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Duke Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 2421 -- 2500
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/00127094-2020-0015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 D.Sagaki and D.Yu	4. 巻 49
2. 論文標題 Path model for an extremal weight module over the quantized hyperbolic Kac-Moody algebra of rank 2	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 690 -- 705
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1080/00927872.2020.1817467	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S.Naito, and F.Nomoto, and D.Sagaki	4. 巻 169
2. 論文標題 Tensor product decomposition theorem for quantum Lakshmibai-Seshadri paths and standard monomial theory for semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 105122
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2019.105122	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 Daisuke Sagaki
2. 発表標題 Chevalley type formula for level-zero Demazure modules in terms of the quantum alcove model
3. 学会等名 Discussion Meeting on Representation Theory 2020 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------