

令和 5 年 6 月 19 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03418

研究課題名(和文) 不分岐コホモロジー群と不変体の有理性問題

研究課題名(英文) Unramified cohomology groups and rationality problem for fields of invariants

研究代表者

星 明考 (Hoshi, Akinari)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：50434262

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：不変体の有理性問題に関して、(1) 12次を除く15次以下の代数体の拡大に対するハッセノルム原理；(2) ダベンポート・ハッセの定理の類似とガウス周期の乗法行列のリフト；(3) 12次の代数体の拡大に対するハッセノルム原理；(4) 6次元以下の乗法的不変体；(5) 2次元の有理性問題と2次形式の交わり；(6) 3次の純半単項式作用；(7) 5次のLecacheux多項式族の分解体と付随する楕円曲線の有理点；(8) ノルム1トーラス；(9) 二面体群についてのrelation module；(10) 3次不分岐コホモロジー群；(11) 低次の代数的トーラス、の研究を行って新たな知見を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

不変体の有理性問題に関する研究を行った。得られた研究成果は代数幾何、数論幾何、数論、群論、環論、表現論、計算代数の各分野に関連しており、各分野において重要な結果をいくつも含んでいる。ここで得られた具体例を元にして、理論が具体例の計算を生み、具体例の計算が理論を生む、好循環が生まれることが期待される。

研究成果の概要(英文)：About rationality problem for fields of invariants, we studied (1) Hasse norm principle for fields of degree ≤ 15 except for 12; (2) Davenport and Hasse's theorems and lifts of multiplication matrices of Gaussian periods; (3) Hasse norm principle for fields of degree 12; (4) multiplicative invariant fields of dimension ≤ 6 ; (5) a two-dimensional rationality problem and intersections of two quadrics; (6) three-dimensional purely quasi-monomial actions; (7) splitting fields of Lecacheux's family of quintic polynomials and rational points of associated elliptic curves; (8) norm one tori; (9) relation modules for dihedral groups; (10) degree three unramified cohomology; (11) algebraic tori of small dimensions, and we got several new results.

研究分野：数論、代数学、代数幾何学

キーワード：有理性問題 ネーター問題 不分岐コホモロジー 半単項式作用 安定有理性 レトラクト有理性 双有理分類 ハッセ原理

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

本研究の背景にある、ガロア逆問題は「任意の有限群 G が体 k の拡大のガロア群として出現するだろうか？」という自然な問いかけを指しており、有理数体上において未解決である。有理数体上の絶対ガロア群は、数論における最も興味深い対象の 1 つであり、同問題は「任意の有限群が絶対ガロア群の商群として出現するだろうか？」と言い換えられる。日本でも、これまで伊原康隆先生の研究などをはじめとして数多くの優れた研究が行われてきた。

2. 研究の目的

本研究では、ネーター問題を含む「不変体の有理性問題」を研究の核心をなす学術的問いとする。不変体の有理性問題に関して、

- <1> 不分岐コホモロジー群と有理性問題；
- <2> 代数的トーラスの有理性問題とその応用；
- <3> 半単項式作用による不変体の有理性問題；
- <4> 代数幾何と数論のアルゴリズム開発とその応用

の研究を行うことが目的である。

3. 研究の方法

(1) ガロア逆問題へのアプローチの 1 つとして、Emmy Noether (1913) が提唱した、Noether's strategy と呼ばれる、ネーター問題の肯定的解決による手法がある。ネーター問題とは、体 k 上の n 変数有理関数体の置換作用による不変体 $k(G)$ に対し、「 $k(G)$ は k 上有理的か？ すなわち、再び k 上の n 変数有理関数体と同型(純超越的)か？」を問う問題である。同問題の肯定解によって、ヒルベルトの既約性定理を適用すれば、代数体 k 上のガロア逆問題が肯定的に解かれる。ネーター問題は関数体の言葉で述べられているが、射影空間の G 被覆による商多様体 P^n/G が有理多様体であるかを問うており、歴史的にも、さまざまな高次元の非有理的である単有理代数多様体、非自明な Artin-Mumford 不変量、Bloch-Kato 予想、不分岐ブラウアー群、不分岐コホモロジー群などの興味深い具体例を提供し、代数幾何学における代数多様体の双有理分類において大変重要となっている。

(2) 本研究は、不変体の有理性問題に関して、

- <1> 不分岐コホモロジー群と有理性問題；
- <2> 代数的トーラスの有理性問題とその応用；
- <3> 半単項式作用による不変体の有理性問題；
- <4> 代数幾何と数論のアルゴリズム開発とその応用

の研究を行うため、それぞれの先行研究を踏まえた上で、代数幾何、数論幾何、数論、群論、環論、表現論、計算代数における理論・手法を分野に捉われることなく縦横無尽に駆使し、理論が具体例の計算を生み、具体例の計算が理論を生むことを目指す。

4. 研究成果

(1) Norm one tori and Hasse norm principle (2022):

金井和貴氏(新潟大学) 山崎愛一氏(京都大学)との共同研究として、ハッセノルム原理についての研究を行い、12 次を除く 15 次以下の代数体の拡大に対して、そのノルム 1 トーラスの滑らかなコンパクト化のピカル群の 1 次コホモロジーを計算し、ハッセノルム原理が成り立つための必要十分条件を与えた。

(2) Davenport and Hasse's theorems and lifts of multiplication matrices of Gaussian periods (2022):

金井和貴氏(新潟大学)との共同研究として、ダベンポート・ハッセの定理とその類似およびガウス周期の乗法行列のリフトの研究を行って得られた結果を 23 次以下の具体例と共に発表した。

(3) Norm one tori and Hasse norm principle, II: Degree 12 case (2023):

金井和貴氏(新潟大学) 山崎愛一氏(京都大学)との共同研究として、ハッセノルム原理についての研究を行い、12 次の代数体の拡大に対して、そのノルム 1 トーラスの滑らかなコンパクト化のピカル群の 1 次コホモロジーを計算し、ハッセノルム原理が成り立つための必要十分条件を与えた。

(4) Multiplicative Invariant Fields of Dimension ≤ 6 (2023):

Ming-chang Kang 氏(国立台湾大学) 山崎愛一氏(京都大学)との共同研究として、乗法的不変体の有理性問題に取り組み、6 次元以下の複素数体上の乗法的不変体の不分岐ブラウアー群をコンピュータを用いて完全に決定した。また結果の一部をコンピュータによらない手計算によ

って一般化することにも成功した。応用として、あるアーベル群の6次交代群による拡大に対して、不分岐ブラウアー群の非消滅を示し、対応する不変体がレトラクト有理的ではないことを示すことで、複素数体上のネーター問題の反例を与えた。

(5) A two-dimensional rationality problem and intersections of two quadrics (2021): Ming-chang Kang 氏 (国立台湾大学)、北山秀隆氏 (和歌山大学)、山崎愛一氏 (京都大学) との共同研究として、2次元の有理性问题と2次形式の交わりについて研究を行い、有理性 (安定有理性、レトラクト有理性、単有理性) が成り立つための必要十分条件を有理点が2点存在する (非特異な有理点が存在する) という形で与えるとともに、ヒルベルト記号を用いて明示的に与えることに成功した。J.-L. Colliot-Thelene 氏 (Paris-Saclay 大学) から主結果の一部が、1987年の J.-L. Colliot-Thelene, J.-J. Sansuc, P. Swinnerton-Dyer による結果 (J. Reine Angew. Math. 373 (1987) 37-107 と 374 (1987) 72-168) によって復元されることを指摘していただき、論文に Appendix: a geometric interpretation として掲載した。

(6) Three-dimensional purely quasimonomial actions (2020): 北山秀隆氏 (和歌山大学) との共同研究として、3次の純半単項式作用に対する不変体の有理性问题を3つの場合を除いて解決した。また、解決できなかった3つの場合に対しても、その状況をできる限り明らかにした。さらに、その結果を5次の直可約な純半単項式作用に対する不変体の有理性问题に応用することに成功した。

(7) On Lecacheux's family of quintic polynomials (2021): 小柴将和氏 (新潟大学) との共同研究として、5次の生成的多項式族の1つである Lecacheux 多項式族に対して、Kida, Rikuna, Sato (2010) の Brumer 多項式族に対する最小分解体の分類定理の類似を証明した。これにより、Lecacheux 多項式族の分解体と付随する楕円曲線の有理点の関係を明らかにした。また、数式処理ソフトウェア Sage を用いることで、その具体例をいくつか構成した。

(8) Rationality problem for norm one tori (2021): 山崎愛一氏 (京都大学) との共同研究として、次数の低い代数的トーラスの有理性问题に関する研究をノルム1トーラスという特別な代数的トーラスの場合に行った。この結果、次数 n が素数の場合、および、次数 n が10以下の場合に、 $n-1$ 次元のノルム1トーラスの安定有理性およびレトラクト有理性を、1つの安定有理性に対する例外を除いて、決定した。

(9) Rationality problems for relation modules of dihedral groups (2019): Ming-chang Kang 氏 (国立台湾大学)、山崎愛一氏 (京都大学) との共同研究として二面体群についての relation module とそれに関連する有理性問題の研究を行った。relation module の直和分解の様子や直既約性を調べるとともに、それを関連する不変体の有理性問題に応用した。

(10) Degree three unramified cohomology groups and Noether's problem for groups of order 243 (2020): 3次不分岐コホモロジー群と有理性問題に関する研究を Ming-chang Kang 氏 (国立台湾大学)、山崎愛一氏 (京都大学) と共同で行った。位数が3の5乗、5の5乗、7の5乗の群に対して、3次不分岐コホモロジー群を完全に決定することに成功した。その結果、位数が3の5乗の群に対する複素数体上のネーター問題を完全に解決した。

(11) Rationality problem for norm one tori in small dimensions (2020): 次数の低い代数的トーラスの有理性问题に関する研究をノルム1トーラスという特別な代数的トーラスの場合に山崎愛一氏 (京都大学)、長谷川寿人氏 (新潟大学) と共同で行った。この結果、 n が15以下の場合に、 $n-1$ 次のノルム1トーラスの安定有理性およびレトラクト有理性を決定した。5種類の Mathieu 群に対して、対応するノルム1トーラスが非レトラクト有理的であることも示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 4件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Akinari Hoshi, Kazuki Kanai, Aiichi Yamasaki	4. 巻 91
2. 論文標題 Norm one tori and Hasse norm principle	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematics of Computation	6. 最初と最後の頁 2431 ~ 2458
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/mcom/3735	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akinari Hoshi, Kazuki Kanai	4. 巻 84
2. 論文標題 Davenport and Hasse's theorems and lifts of multiplication matrices of Gaussian periods	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Finite Fields and Their Applications	6. 最初と最後の頁 1 ~ 26
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.ffa.2022.102101	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akinari Hoshi, Kazuki Kanai, Aiichi Yamasaki	4. 巻 244
2. 論文標題 Norm one tori and Hasse norm principle, II: Degree 12 case	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 84 ~ 110
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2022.09.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akinari Hoshi, Ming-chang Kang, Aiichi Yamasaki	4. 巻 283
2. 論文標題 Multiplicative Invariant Fields of Dimension ≤ 6	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1 ~ 137
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/memo/1403	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akinari Hoshi, Ming-chang Kang, Hidetaka Kitayama, Aiichi Yamasaki	4. 巻 168
2. 論文標題 A two-dimensional rationality problem and intersections of two quadrics	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Manuscripta Mathematica	6. 最初と最後の頁 423 ~ 437
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00229-021-01313-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akinari Hoshi, Hidetaka Kitayama	4. 巻 60
2. 論文標題 Three-dimensional purely quasimonomial actions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyoto Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 335 ~ 377
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2019-0008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akinari Hoshi, Masakazu Koshihara	4. 巻 97
2. 論文標題 On Lecacheux's family of quintic polynomials	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 1 ~ 6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/pjaa.97.001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Akinari Hoshi, Aiichi Yamasaki	4. 巻 241
2. 論文標題 Rationality problem for norm one tori	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 849 ~ 867
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-021-2117-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akinari Hoshi, Ming-chang Kang, Aiichi Yamasaki	4. 巻 530
2. 論文標題 Rationality problems for relation modules of dihedral groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 368 ~ 401
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2019.04.015	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Akinari Hoshi, Ming-chang Kang, Aiichi Yamasaki	4. 巻 544
2. 論文標題 Degree three unramified cohomology groups and Noether's problem for groups of order 243	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 262 ~ 301
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2019.08.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sumito Hasegawa, Akinari Hoshi, Aiichi Yamasaki	4. 巻 89
2. 論文標題 Rationality problem for norm one tori in small dimensions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics of Computation	6. 最初と最後の頁 923 ~ 940
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/mcom/3469	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計17件 (うち招待講演 12件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Birational classification for algebraic tori (I)
3. 学会等名 新潟代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Birational classification for algebraic tori (III)
3. 学会等名 新潟代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Hasse norm principle for \mathbb{M}_{11} extensions
3. 学会等名 新潟代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Birational classification for algebraic tori
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Akinari Hoshi, Aiichi Yamasaki
2. 発表標題 Birational classification for algebraic tori (I)
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Akinari Hoshi, Kazuki Kanai, Aiichi Yamasaki
2. 発表標題 Hasse norm principle for \mathbb{M}_{11} extensions
3. 学会等名 日本数学会2023年度年会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Akinari Hoshi, Kazuki Kanai
2. 発表標題 Davenport and Hasse's theorems and lifts of multiplication matrices of Gaussian periods
3. 学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Rationality problem for fields of invariants
3. 学会等名 名城大学理工学部数学科談話会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Rationality problem for fields of invariants
3. 学会等名 第18回代数曲線論シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Rationality problem for fields of invariants
3. 学会等名 Degenerations and models of algebraic varieties and related topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Rationality problem for fields of invariants
3. 学会等名 Homotopic and Geometric Galois Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Degree three unramified cohomology groups and Noether's problem for groups of order 243
3. 学会等名 NCTS Seminar on Algebra (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Degree three unramified cohomology groups and Noether's problem for groups of order 243
3. 学会等名 射影多様体の幾何とその周辺 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Rationality problem for fields of invariants
3. 学会等名 第41回可換環論シンポジウム(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akinari Hoshi
2. 発表標題 Degree three unramified cohomology groups and Noether's problem for groups of order 243
3. 学会等名 第15回多項式環論セミナー(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akinari Hoshi, Kazuki Kanai, Aiichi Yamasaki
2. 発表標題 Norm one tori and Hasse norm principle
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Akinari Hoshi, Kazuki Kanai, Aiichi Yamasaki
2. 発表標題 Norm one tori and Hasse norm principle, II
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計2件

1. 著者名 田中環、小島秀雄、星明考、折田龍馬、印南信宏、吉原久夫	4. 発行年 2022年
2. 出版社 培風館	5. 総ページ数 203
3. 書名 要点明解 線形数学 三訂版	

1. 著者名 小松亨、星明考、北山秀隆	4. 発行年 2020年
2. 出版社 新潟大学学術リポジトリ	5. 総ページ数 368
3. 書名 構成的ガロア逆問題と不変体の有理性問題 (第27回整数論サマースクール報告集)	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Akinari HOSHI's Home Page http://mathweb.sc.niigata-u.ac.jp/~hoshi/index-j.html 新潟大学研究者総覧 http://researchers.adm.niigata-u.ac.jp/html/100000738_ja.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	山崎 愛一 (Yamasaki Aiichi) (10283590)	京都大学・理学研究科・准教授 (14301)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	康 明昌 (Kang Ming-chang)		
研究協力者	北山 秀隆 (Kitayama Hidetaka)		
研究協力者	金井 和貴 (Kanaï Kazuki)		
研究協力者	長谷川 寿人 (Hasegawa Sumito)		
研究協力者	小柴 将和 (Koshiba Masakazu)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
台湾	国立台湾大学	国家理論科学研究中心	