様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　６ 月　９ 日現在

機関番号：１３２０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３４２０

研究課題名（和文）ワイル亜群と一般化された量子群の表現論および関連するグラフ理論

研究課題名（英文）Weyl groupoids, generalized quantum groups, and related graph theory

研究代表者
山根　宏之（YAMANE, Hiroyuki）

富山大学・学術研究部理学系・教授

研究者番号：１０２３０５１７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：量子群において大変重要な事実は、量子二重構成法により量子群の普遍R行列が構成される事である。一般化された量子群は量子二重構成法により定義されるホップ代数である。2015年に有限ワイル亜群がCuntz-Heckenbergerにより分類された。当該研究期間内に、山根は一般化された量子群に付随する有限ワイル亜群のケイリーグラフがハミルトン閉路を持つ事を示した。Batra-山根は一般化された量子群の中心のある元の構成を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義
一般化された量子群は１９８０年代に導入された量子群が普遍R行列を持つという特性に注目して一般化した概念である。従来の量子群以外の多数の例外的な一般化された量子群が存在する。一般化された量子群を研究することによって新しい物理的なモデルを得る事が期待される。さらには、一般化された量子群に関連して導入されたワイル亜群も多数あるのでそのケイリーグラフも多数あり、これらは性質の良いグラフだと考えられるのでその研究がグラフ理論に貢献できると期待される。

研究成果の概要（英文）：The important fact concerning the quantum groups is that the universal R-matrix of a quantum group is constructed by using the quantum double construction. The generalized quantum groups are the Hopf algebras defined by using the quantum double construction. In 2015, Cuntz-Heckenberger classified the finite Weyl groupoids. In the period of this fund, Yamane showed that the Cayley graph of the Weyl groupoid of a generalized quantum group has a Hamitonian cycle, and Batra-Yamane constructed some central elements of the generalized quantum groups.

研究分野：ホップ代数

キーワード：ホップ代数　スーパーリー代数　ワイル亜群　一般化された量子群　ケイリーグラフ　ハミルトン閉路

様 式 C－１９、F－１９－１、Z－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

山根宏之は、1994 年と 1999 年の有限次元複素単純スーパーリー代数および無限次元アフィン型スーパーリー代数の定義関係式を求めた。その過程でコクセター亜群の取り扱いを修得した。Istvan Heckenberger の 2006 年のコクセター亜群を証明に用いた有限型の一般化された量子群 $U(\chi)$の分類をした定理が当該研究の主な動機である。$U(\chi)$にはワイル群を拡張した概念であるワイル亜群が重要な役割を果たす。山根宏之は 2020 年まで有限型 $U(\chi)$の表現論の幾つかの結果を得ていた。その一方で、山根宏之は 2016 年ごろからワイル亜群のケイリーグラフのハミルトン閉路の存在性の研究を行ってきた。

２．研究の目的

当該研究の究極の目的はアフィン型の一般化された量子群を定義し、表現論を研究し、その応用としてヤコビ３重積公式タイプの公式を得ることであるが､定義することすら困難である｡一方、有限型の一般化された量子群のワイル亜群のケイリーグラフの研究も同時に取り組んでいる。そのケイリーグラフのハミルトン閉路の構成を行い、グラフのゼータ関数や組み合わせ論的グレイコード等への応用を探る。

３．研究の方法

主な研究の手法は何年もの時間がかかる膨大な計算および比較的単純な論理の積み重ねである。2020 年４月から９月まで富山大学理学部の長期研修制度により集中的に一般化された量子群のケイリーグラフのハミルトン閉路の研究を行った。研究集会「Toyama Workshop on Quantum Groups and Related Topics (2022.9.18-2022.9.21, ボルファートとやま翡翠（ひすい）の間)」を開催した。複数の研究集会に参加をし、研究発表を行い、他の参加者から、刺激を受けたり、貴重な助言を受けた。

４．研究成果

<u>(1)一般化された量子群の中心と有限次元表現の研究：</u>A を有限ランクのアーベル群とする。K を体とする。$K^\times=K-\{0\}$とする。写像$\chi: A\times A\to K^\times$を、$\chi(a+b,c)=\chi(a,c)\chi(b,c)$および$\chi(a,b+c)=\chi(a,b)\chi(a,c)$ $(a,b,c\in A)$をみたすものとする。このようなχから単位元１をもつ結合的 K 代数 $U(\chi)$がドリンフェルドの量子２重構成法により定義される。$\{\alpha_i|i\in I\}$を A の基とする。ここで I は添え字集合であり，特に I の元の個数は A の階数と同じである。$U(\chi)$は K_i, $K_i^{-1}, L_i, L_i^{-1}, E_i, F_i$ $(i\in I)$ を生成元とし，これらの元たちは等式 $K_iK_i^{-1}=K_i^{-1}K_i=1, L_iL_i^{-1}=L_i^{-1}L_i=1$, $K_iK_j=K_jK_i, L_iL_j=L_jL_i, K_iE_jK_i^{-1}=\chi(\alpha_i,\alpha_j)E_j, K_iF_jK_i^{-1}=\chi(\alpha_i,\alpha_j)^{-1}F_j, L_iE_jL_i^{-1}=\chi(\alpha_j,\alpha_i)^{-1}E_j, L_iF_jL_i^{-1}=\chi(\alpha_j,\alpha_i)F_j$，$E_iF_i-F_iE_i=-K_i+L_i$，$E_iF_j=F_jE_i$ $(i\neq j)$ $(i,j\in I)$をみたす。ただし，これらは定義関係式ではない。E_i たちどうし，および F_i たちどうしの複雑な関係式が定義関係式として要請される。三角分解 $U(\chi)=U^-(\chi)\otimes U^0(\chi)\otimes U^+(\chi)$（この等式は線形空間としての等式である）が成り立つ。ここで，$U^0(\chi)$は $K_i, K_i^{-1}, L_i, L_i^{-1}$ $(i\in I)$で生成される $U(\chi)$の部分代数である。$U^0(\chi)$はローラン多項式代数 $K[K_i,K_i^{-1},L_i,L_i^{-1}|i\in I]$である。$U^-(\chi)$ は F_i $(i\in I)$で生成される $U(\chi)$の部分代数である。$U^+(\chi)$は E_i $(i\in I)$で生成される $U(\chi)$の部分代数である。$A(+)$を$\{\alpha_i|i\in I\}$の非負係数一次結合全体のなす A の部分集合とする。$U(\chi)$の部分空間 $U(\chi)_\lambda$ $(\lambda\in A)$を $U(\chi)=\oplus_{\lambda\in A} U(\chi)_\lambda$，$U(\chi)_\lambda U(\chi)_\mu\subset U(\chi)_{\lambda+\mu}$，$U^0(\chi)\subset U(\chi)_0, E_i\in U(\chi)_{\alpha(i)}, F_i\in U(\chi)_{-\alpha(i)}$によって定義する。(ここで，$\alpha(i)$は$\alpha_i$を意味する。) $\lambda\in A$ に対して，$U^\pm(\chi)_\lambda=U^\pm(\chi)\cap U(\chi)_\lambda$ とする。$U^\pm(\chi)=\oplus_{\lambda\in A(+)} U^\pm(\chi)_{\pm\lambda}$ である。$X\in U^+(\chi)-\{0\}$に対してある $\lambda\in A(+)$が存在して $U^+(\chi)_\lambda\in X$ であるとき、X は同次的であるといい、$||X||:=\lambda$ と書く。さらに$||X||\neq 0$ であるとき、X は非零同次的であるということにする。$m(X)$を$\Sigma_{t=1}^{m(X)}\chi(||X||,||X||)^t=0$ となる最小の正の整数とする。(最小の正の整数が存在しないときは、$m(X):=\infty$とおく。)「Kharchenko の PBW 定理(1999)：$U^+(\chi)$の非零同次的な元 X_y $(y\in Y)$と集合 Y の上の全順序$\leqq$が存在して$\{1\}\cup\{(X_{y(1)})^{u(1)}(X_{y(2)})^{u(2)}\cdots(X_{y(k)})^{u(k)} \mid y(1)<y(2)<\cdots<y(k), 1\leqq u(t)<m(X_{y(t)})\ (1\leqq t\leqq k)\}$が $U^+(\chi)$の K 上の基底となる。」$R^+(\chi):=\{||X_y|| \mid y\in Y\}$とおく。$R^+(\chi)$を $U^+(\chi)$の Kharchenko の正ルート系と呼ぶ。$R^+(\chi)$が有限集合のときは、$f(y):=||X_y||$により定義される写像 $f:Y\to R^+(\chi)$は全単射であり、$R(\chi):=R^+(\chi)\cup(-R^+(\chi))$は Heckenberger-Yamane(2008)の意味での一般化された有限ルート系である。K の標数が 0 のときの $R(\chi)$が一般化された有限ルート系であるχは Heckenberger (2009)により分類されている。その分類によると、$U(\chi)$が A-G 型の複素単純リー代数の量子群や A-G 型の複素単純リー超代数の量子群であることもあるが、その他多くの例外型がある。$\omega: A\to K^\times$を$\mathbb{Z}$ 加群の準同型写像とする。$\mathfrak{Z}_\omega(\chi)=\{Z\in U(\chi)_0 \mid {}^\forall\lambda\in A, {}^\forall X\in U(\chi)_\lambda, ZX=\omega(\lambda)XZ\}$とおく。線形写像 $\underline{P}: U(\chi)=U^-(\chi)\otimes U^0(\chi)\otimes U^+(\chi)\to U^0(\chi)$を標準的射影とする。$\underline{P}$は$\mathfrak{Z}_\omega(\chi)$の上で単射である。以前に山根は次の共著論文の結果を得ていた。「定理 (Azam-Yamane-Yousofzadeh (2015))：K の標数が０のときの $U(\chi)$の有限次元既約加群を分類した。」

「定理 (Batra-Yamane (2018)：$R^+(\chi)$が有限集合であって、$\chi(\beta,\beta)\neq 1$と仮定する。このとき、$\underline{P}$の$\mathfrak{Z}_\omega(\chi)$の像$\underline{P}(\mathfrak{Z}_\omega(\chi))(\subset U^0(\chi))$ は，各$\beta\in R^+(\chi)$に対する次の条件$(e_1)_\beta$，$(e_2)_\beta$，$(e_3)_\beta$，$(e_4)_\beta$をみたすものとして特徴づけされる。すなわち，$\sum_{\lambda,\mu\in A} a_{\lambda,\mu}K_\lambda L_\mu\in\underline{P}(\mathfrak{Z}_\omega(\chi))$

($a_{\lambda,\mu}\in K$)となる必要十分条件は，各$\beta\in R(\chi)$に対する次の条件$(e_1)_\beta$，$(e_2)_\beta$，$(e_3)_\beta$，$(e_4)_\beta$をみたすことである。$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=\omega(\beta)\chi(\beta,\mu)\chi(\lambda,\beta)^{-1}$とおく。$q_\beta=\chi(\beta,\beta)$とおく。「$(e_1)_\beta$：$q_\beta$が１のべき根でなくて、$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=q_\beta{}^t$となる$t\in\mathbb{Z}-\{0\}$があれば，$a_{\lambda+t\beta,\mu-t\beta}=\rho(\beta)^t a_{\lambda,\mu}$をみたす。」，「$(e_2)_\beta$：$q_\beta$が１のべき根でなくて、$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=q_\beta{}^t$となる$t\in\mathbb{Z}$がなければ，$a_{\lambda,\mu}=0$である。」，「$(e_3)_\beta$：$q_\beta$が１の原始 c 乗根であって、$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=q_\beta{}^t$となる$1\leqq t\leqq c-1$があれば，$\sum_{x\in\mathbb{Z}} a_{\lambda+(cx+t)\beta,\mu-(cx+t)\beta}\rho(\beta)^{-(cx+t)}=\sum_{y\in\mathbb{Z}} a_{\lambda+cy\beta,\mu-cy\beta}\rho(\beta)^{-cy}$をみたす。」，「$(e_4)_\beta$：$q_\beta$が１の原始 c 乗根であって、$\omega_{\lambda,\mu;\beta}=q_\beta{}^k$となる$k\in\mathbb{Z}$がなければ，次の c-1 個の等式$\sum_{x\in\mathbb{Z}} a_{\lambda+(cx+t)\beta,\mu-(cx+t)\beta}\rho(\beta)^{-(cx+t)}=\sum_{y\in\mathbb{Z}} a_{\lambda+cy\beta,\mu-cy\beta}\rho(\beta)^{-cy}$ $(1\leqq t\leqq c-1)$をみたす。」ここで，$\rho(\alpha)\in K^\times$，$K_\alpha\in U^0(\chi)$，$L_\alpha\in U^0(\chi)$は，それぞれ，特徴づけ$\rho(\alpha_i)=\chi(\alpha_i,\alpha_i)$，$K_{\alpha(i)}=K_i$，$L_{\alpha(i)}=L_i$ $(i\in I)$および$\rho(\alpha\pm\beta)=\rho(\alpha)\rho(\beta)^{\pm1}$，$K_{\alpha\pm\beta}=K_\alpha K_\beta{}^{\pm1}$，$L_{\alpha\pm\beta}=L_\alpha L_\beta{}^{\pm1}$ (α，$\beta\in A$)により定義される。」$\Omega:U^0(\chi)\to K$を K 代数の準同型写像とする。$L(\Omega)$をΩに対する$U^0(\chi)$の最高ベクトル既約加群とする。v_Ωを$L(\Omega)$の最高ウエイトベクトルとする。$K_i\cdot v_\Omega=\Omega(K_i)v_\Omega$，$E_i\cdot v_\Omega=0$ $(i\in I)$をみたす。$\lambda\in A(+)$に対して$L(\Omega)_{-\lambda}=U^-(\chi)_{-\lambda}\cdot v_\Omega$とおく。$L(\Omega)=\oplus_{\lambda\in A(+)}L(\Omega)_{-\lambda}$である。$m(\Omega,-\lambda):=\dim L(\Omega)_{-\lambda}$とおく。$\lambda$，$\mu\in A$に対して K 代数の準同型写像$\Lambda_{\lambda,\mu;\omega}:U^0(\chi)\to K$を$\Lambda_{\lambda,\mu;\omega}(K_i):=\chi(\alpha_i,\mu)\omega(\alpha_i)$，$\Lambda_{\lambda,\mu;\omega}(L_i):=\chi(\lambda,\alpha_i)$により定義する。$L(\Lambda_{\lambda,\mu;\omega})$が有限次元であるとき、ある標準的な操作によって、$Z_{\lambda,\mu;\omega}\in\mathfrak{Z}_\omega(\chi)$を構成することが出来て、$\underline{P}(Z_{\lambda,\mu;\omega})=\Sigma_{\nu\in A(+)}\rho(\nu)\, m(\Lambda_{\lambda,\mu;\omega},-\nu)K_{\lambda+\nu}L_{\mu-\nu}$が成り立つ。山根は 2020 年度に出版された論文でティピカルな有限次元である$L(\Omega)$の Weyl-Kac 型の指標公式を得た。Batra-山根は 2020 年度に出版された論文で次の予想を提起した。「予想：$\{Z_{\lambda,\mu;\omega}\mid L(\Lambda_{\lambda,\mu;\omega})$が有限次元$\}$は$\mathfrak{Z}_\omega(\chi)$の基底である。」これらの論文は、海外の研究者の論文[LWY, Y. Luo, Y. Wang, Y. Ye, On the Herish-Chandra homomorphism for quantum superalgebras, Comm. Math. Phys. 393 (2922), no.3 1483-1527]で引用された。[LWY]の作成段階で著者の一人と山根との活発な議論のやりとりあった。また山根は、中国の上海大学の研究者 Hongda Lin, Honglian Zhang と共著での量子超代数$U_q(sl^{(1)}(m|n))$のドリンフェルド生成元の間の関係式に関する論文を作成した。

(2)<u>一般化された量子群に量子群に付随するケイリーグラフのハミルトン閉路の研究：</u>集合 S に対して$|S|$を S の濃度とする。S が有限集合のときは$|S|$は S の元の個数である。Γがグラフであるとは、Γは頂点集合と呼ばれる空集合ではない集合 V と辺集合と呼ばれる V の 2 つの元からなる部分集合全体のなす集合の部分集合 E の組$\Gamma=(V,E)$のことである。V が有限集合であるとき、Γを有限グラフという。$\Gamma=(V,E)$を有限グラフとする。$p:=|V|$とおく。全単射$f:\{1,2,\cdots,p\}\to V$がハミルトン閉路であるとは、$\{f(x),f(x+1)\}\in E$ $(1\leqq x\leqq p-1)$および$\{f(p),f(1)\}\in E$を満たすときにいう。G を群とし、S を「$s\in S$ならば$s^{-1}\in S$」を満たす単位元を含まない G の生成系とする。グラフ$\Gamma(G,S)=(G,\{\{g,gs\}\mid g\in G,\ s\in S\})$を$\Gamma(G,S)$のケイリーグラフとよぶ。「有限群のケイリーグラフはいつもハミルトン閉路をもつか？」という重要な問題がある。次の有名な定理がある。「定理１：有限群 G が$a^2=b^2=c^2=e$および$ab=ba=e$を満たす生成系$S=\{a,b,c\}$をもつとする。このとき、$\Gamma(G,S)$はハミルトン閉路をもつ。」現在まで知られている（次の定理２を含む）有限グラフのハミルトン閉路の存在の証明の多くは定理１の証明のアイデアから派生したものである。「定理２（Conway, Sloane and Wilks (1989)）：(W,S)を有限コクセター系とする。このとき、$\Gamma(W,S)$ ハミルトン閉路をもつ。」（有限コクセター系(W,S)のコクセターグラフ（ディンキン図形とも呼ぶ。）がループをもたない事が定理２の証明の要である。）山根はワイル亜群のケイリーグラフのハミルトン閉路の存在問題を定理１の証明のアイデアにより研究している。n を自然数とする。A を階数が n の自由$\mathbb{Z}$加群とする。$\underline{\underline{B}}$を A の自由$\mathbb{Z}$基全体の集合とする。$B=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\in\underline{\underline{B}}$に対して$A^+_B:=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n\in A\mid k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z},\ k_1,\cdots,k_n\geqq0\}$および$A^-_B:=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n\in A\mid k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Z},\ k_1,\cdots,k_n\leqq0\}$とおく。R を A の空でない部分集合とする。B を$\underline{\underline{B}}$の空でない部分集合とする。組(R,B)が一般化されたルート系であるとは、次の(1)-(3)を満たすときに言う([Yamane, Sao Paulo J. Math, Sci. (2012) Vol.10, 1-19]での定義。元々の一般化されたルート系は Yamane-Heckenberger(2008)により導入された。)。(1) 任意の$B\in\mathbf{B}$に対して$B\subset R$であり、$R=(R\cap A^+_B)\cup(R\cap A^-_B)$である。(2) 任意の$B\in\mathbf{B}$，任意の$\beta\in B$に対して$\mathbb{Z}\beta\cap R=\{\beta,-\beta\}$である。(3) 任意の$B\in\mathbf{B}$，任意の$\beta\in B$に対して、ある$C\in\mathbf{B}$が存在して、$R\cap A^-_B\cap A^+_C=\{-\beta\}$である。ここで、$B^{(\beta)}:=C$と書く。(R,B)を一般化されたルート系とする。（R が有限集合ならば、$\mathbf{B}=\{B\in\underline{\underline{B}}\mid R=(R\cap A^+_B)\cup(R\cap A^-_B)\}$が成り立つ。したがって、R が有限集合ならば、(R,B)を単に R と書く。）R が有限集合であると仮定する。このとき R を一般化された有限ルート系とよぶ。（有限集合である R は、Cuntz-Heckenberger(2015)により分類された。）$I:=\{1,2,\cdots,n\}$とおく。ここで、$B\in\mathbf{B}$に対して$n=|B|$である。$B\in\mathbf{B}$の元は矛盾なく順序つける事が出来る。すなわち、$B=\{\alpha^B{}_1,\cdots,\alpha^B{}_n\}\in\mathbf{B}$として、各$i\in I$に対する写像$\tau_i$: $\mathbf{B}\to\mathbf{B}$で次を満たすものが存在する。($\beta:=\alpha^B{}_i$とおき、$C:=B^{(\beta)}$とおく)$\tau_i(B):=C$で$\alpha^C{}_i:=-\alpha^B{}_i$，$\alpha^C{}_j:=\alpha^B{}_j+N(B,i,j)\alpha^B{}_i$ ($N(B,i,j)$はある非負整数）である。グラフ$\Gamma(R)$を次のようにして定義する。$\Gamma(R)$の頂点集合$V(R)$を$V(R):=\mathbf{B}$により定義する。$\Gamma(R)$の辺集合$E(R)$を$E(R):=\{\{B,\tau$

$_i(B)\}|\ B\in\mathbf{B},\ i\in I\}$により定義する。グラフ$\Gamma(R):=(V(R),\ E(R))$を R のケイリーグラフと呼ぶ。半群$W(R)$を次のようにして定義する。$B\in\mathbf{B}$と $i,j\in I$ に対して、$m(B,i,j):=|R\cap\{k\,\alpha^B{}_i+\ r\,\alpha^B{}_i|k,r\in\mathbb{Z},\ k,r\geqq 0\}|$とおく。半群$W(R)$は、$X=\{0,e^B,\ s^B{}_i|\ B\in\mathbf{B},\ i\in I\}$を生成系とし次の定義関係式により定義する。$0x=x0=0\ (x\in X)$, $e^B\ e^B\ =\ e^B$, $e^B\ e^C\ =0\ (B\neq C)\ e^C\ s^B{}_i\ =\ s^B{}_i=\ s^B{}_i\ e^B\ (C:=\ \tau_i(B))$, $s^C{}_i\ s^B{}_i=\ e^B\ (C:=\ \tau_i(B))$, $s^{C(m-1)}{}_i\ s^{C(m-2)}{}_j\ s^{C(m-3)}{}_i\ s^{C(m-2)}{}_j\cdots s^{C(1)}{}_i\ s^{C(0)}{}_j=\ e^B\ (i\neq j,m:=m(B,i,j)<\infty,\ C(0):=\ B,\ C(2t+1):=\tau_i(C(2t)),\ C(2t):=\tau_j(C(2t-1)))$ 。$W(R)$を R に付随する（一番大きな）ワイル亜群と呼ぶ。$C\in\mathbf{B}$を固定する。$H:=\{w\ e^C\ |w\in W(R)\}$とおく。全単射$\xi$: $H\to\mathbf{B}$で、$\xi(e^C)=C$, $\xi(s^B{}_i\ w)=\ \tau_i(\xi(w))\ (w\neq 0,\ e^B\ w\neq 0)$となるものが存在する。($\mathbf{B}$上の同値類$\sim$を次の条件＃を満たすものとする。「条件＃：$B\sim C$ならば$\mathbb{Z}$加群の同型写像 f: $A\to A\ (f(\alpha^B{}_i):=\ \alpha^C{}_i\ (i\in I)\ )$に対して$f(R)=R$を満たす。」$\underline{\mathbf{B}}$を$\mathbf{B}$の$\sim$による商集合とする。このとき半群$\underline{W}(R)$を$\underline{X}=\{0,e^{[B]},\ s^{[B]}{}_i|\ [B]\in\underline{\mathbf{B}},\ i\in I\}$を生成系とし、$W(R)$と同様の定義関係式で定義される半群とする。$\underline{W}(R)$は $W(R)$と本質的に同じである。特にξと同様な写像が存在する。逆に、同値類$\sim$が条件＃により定義されるとき$\underline{W}(R)$を$\underline{W}^{\#}(R)$と書き一番小さなワイル亜群と呼ぶ。R が複素単純リー代数のルート系と同じであるときは$\underline{W}^{\#}(R)-\{0\}$は群あり、それは R の有限ワイル群である。R が A-G 型複素単純リー超代数のルート系と同じであるときは、そのワイル亜群は$\underline{W}^{\#}(R)$とは限らない）K を標数 0 の体とする。$K^{\times}:=K-\{0\}$とする。写像$\chi:A\times A\to K^{\times}$を$\chi(a+b,c)=\ \chi(b,c)\ \chi(a,c)$, $\chi(a,b+c)=\ \chi(a,b)\ \chi(a,c)\ (a,b,c\in A)$をみたすものとする。$\chi$を K 上の双指標と呼ぶ。R が$\chi$に付随したものであるとは、$q^B{}_{ij}:=\ \chi(\alpha^B{}_i,\ \alpha^B{}_j)\ (B\in\mathbf{B},\ i,\ j\in I)$とおいたとき、$i\neq j$ に対して、$q^B{}_{ii}=1$ のときは、$N(B,i,j)=0$ であり、$q^B{}_{ii}\neq 1$ のときは、$N(B,i,j)$は$((q^B{}_{ii})^{N(B,i,j)+1}-1)(1-\ q^B{}_{ij}\ q^B{}_{ji}(q^B{}_{ii})^{N(B,i,j)})=0$ が最小の非負整数であるときにいう。この様なχは Heckenberger(2009)により分類された。その分類によるとランクが 6 以上のときは、全ての一般化された有限ルート系は標数 0 の体上の双指標に付随したものである。ランクが８以上のときは、全ての一般化された有限ルート系は A-D 型の複素単純有限次元リー代数のルート系または A-D 型の複素単純有限次元スーパーリー代数のルート系のどちらかである。山根は当該研究期間内に次の定理３を得た「定理３（Yamane (2023)）：R が標数 0 の体上の双指標に付随したものであるとき R のケイリーグラフ$\Gamma(R)$はハミルトン閉路をもつ。」定理３の証明のアイデアは定理２の証明法に沿ったものであるが、χの$B\in\mathbf{B}$に対するディンキン図形にループが現れるので、低ランクであるランクが３または４のときはハミルトン閉路（の１つ）を具体的に求めた。近年では国内外でグラフのハミルトン閉路に関する論文が発表されているが、その多くは、証明が簡潔な比較的短い論文である。定理３の証明は、多くの場合分けによるもので、長いものである。今後、短い証明が得られれば、より多くのグラフに適用できる証明法である事が期待される。

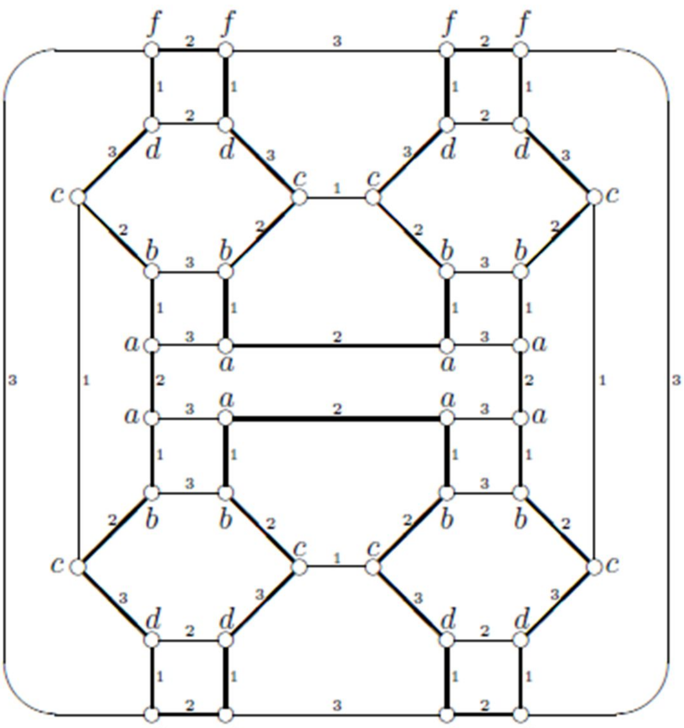

図１　C(3)型単純スーパーリー代数のワイル亜群 W のケイリーグラフのハミルトン閉路

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　3件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Yamane Hiroyuki	４．巻 20
２．論文標題 Typical irreducible characters of generalized quantum groups	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	６．最初と最後の頁 2140014～2140014
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0219498821400144	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Batra Punita、Yamane Hiroyuki	４．巻 751
２．論文標題 Natural elements of center of generalized quantum groups	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Contemporary Mathematics	６．最初と最後の頁 19～31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/conm/751/15114	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Lin Hongda、Yamane Hiroyuki、Zhang Honglian	４．巻 -
２．論文標題 On generators and defining relations of quantum e superalgebra Uq({\hat {sl}}m|n)	５．発行年 2022年
３．雑誌名 Journal of Algebra and Its Applications	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S021949882450021X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計12件（うち招待講演　6件／うち国際学会　5件）

１．発表者名 Hiroyuki Yamane
２．発表標題 On typical irreducible character formulas of generalized quantum groups
３．学会等名 2021年度研究集会「代数的Lie理論および表現論」（国際学会）
４．発表年 2021年

1．発表者名 山根　宏之
2．発表標題 ワイル亜群のケーレーグラフのハミルトン閉路
3．学会等名 第 36 回 リー代数サマーセミナー (onlne)
4．発表年 2021年

1．発表者名 山根　宏之
2．発表標題 一般化された量子群のワイル亜群のケイリーグラフのハミルトン閉路
3．学会等名 日本数学会2021年度秋季総合分科会　無 限 可 積 分 系
4．発表年 2021年

1．発表者名 山根　宏之
2．発表標題 Representation theory of generalized quantum algebras using Weyl groupoids
3．学会等名 RIMS研究集会「組合せ論的表現論および関連分野との連携」（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 山根宏之
2．発表標題 Generalized quantum groups with Kharchenko PBW theorem
3．学会等名 Algebraic Lie Theory and Representation Theory (ALTReT2019)（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2019年

１．発表者名
山根宏之

２．発表標題
Skew centers and generalized quantum groups with Kharchenko PBW Theorem

３．学会等名
The International Conference on Lie Theory and Representations 2019 (Department of Mathematics, Shanghai University,China)（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
山根宏之

２．発表標題
ワイル亜群について

３．学会等名
第３５回リー代数サマーセミナー（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
山根宏之

２．発表標題
一般化された量子群の典型的既約指標

３．学会等名
第１回 岩手代数学セミナー（招待講演）

４．発表年
2019年

１．発表者名
山根宏之

２．発表標題
Typical character for the generalized quantum groups

３．学会等名
The 2nd Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

1．発表者名 山根宏之
2．発表標題 一般化された量子群の典型的既約指標につい
3．学会等名 2020 日本数学会　年会
4．発表年 2020年

1．発表者名 山根宏之
2．発表標題 スーパー量子群の普遍R行列について
3．学会等名 Toyama Workshop on Quantum Groups and Related Topics
4．発表年 2022年

1．発表者名 山根宏之
2．発表標題 Hamiltonian cycles for Weyl groupoids
3．学会等名 RIMS研究集会「組合せ論的表現論における最近の展開」
4．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Hiroyuki Yamane Homepage http://www3.u-toyama.ac.jp/hiroyuki/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
The 2nd Meeting for Study of Number theory, Hopf algebras and related topics	2020年～2020年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	上海大学			