

令和 6 年 5 月 31 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03423

研究課題名（和文）対数的極小モデルプログラムに現れる特異点

研究課題名（英文）Singularities in the log minimal model program

研究代表者

川北 真之（Kawakita, Masayuki）

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：10378961

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）： 極小対数的食違い係数の昇鎖律を非特異な3次元多様体上で完成させた。この結果は3次元非特異多様体上において、 a 対数的標準閾の昇鎖律、極小対数的食違い係数の統一的イデアル進半連続性、および中村の有界性と呼ばれる極小対数的食違い係数を計算する因子の多様体自身に関する対数的食違い係数の有界性と同値である。よってこれらをすべて示したことになる。なお、これらは固定された3次元端末商特異点上の主張へと拡張できる。

また、昇鎖律問題の視点から、標準特異点を持つ3次元多様体上の因子を半安定型の標準特異点に収縮する写像を研究した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数多様体とは、連立多項式の共通零点集合として定義される図形です。対数的極小モデルプログラムと呼ばれる理論によって代数多様体を分類するとき、代数多様体の特異点を制御する必要が生じます。私は極小対数的食違い係数と呼ばれる特異点の不変量を研究しました。特に極小対数的食違い係数の重要な予想である昇鎖律予想を、なめらかな3次元代数多様体上で完全に解決しました。

研究成果の概要（英文）： I established the ascending chain condition (ACC) for minimal log discrepancies on smooth threefolds completely. It implies, on smooth threefolds, the ACC for a -lc thresholds, the uniform ideal-adic semi-continuity and Nakamura's boundedness, which means the boundedness of the log discrepancy of some divisor that computes the minimal log discrepancy. The results are extended to the statements on a fixed terminal quotient threefold singularity.

From the point of view of the ACC problem, I studied threefold log divisorial contractions from a canonical threefold to a canonical singularity of semistable type.

研究分野：代数幾何学

キーワード：極小対数的食違い係数 昇鎖律 標準特異点 重み付き爆発 因子収縮写像

1. 研究開始当初の背景

双有理幾何学において、各双有理同値類を代表する代数多様体を標準因子の比較によって抽出する理論が極小モデルプログラム(MMP)である。MMP の発展に伴って対象は代数多様体と因子の組へと広げられ、一連の拡張は対数化と呼ばれる。対数化された MMP が対数的極小モデルプログラム(LMMP)である。

LMMP は、因子収縮写像およびフリップと呼ばれる双有理変換を経て、対数的標準因子に関して極小な多様体を出力する。LMMP が動くにはフリップの存在とフリップ列の終止が必要となる。3次元では森が本来のフリップの存在を示して MMP を機能させ、後に Shokurov らによって3次元 LMMP は完成した。近年 Birkar, Cascini, Hacon, McKernan は境界因子が巨大であるときの LMMP を機能させて一般次元でフリップの存在を証明した。こうして現在ではフリップの終止予想が最重要な課題となっている。

2. 研究の目的

高次元では滑らかな極小モデルが存在するとは限らないため、LMMP は対数的標準因子の比較に支障をきたさない程度の特異点を許容している。LMMP に現れる特異点は極小対数的食違い係数と呼ばれる不変量によって定義される。極小対数的食違い係数とは対数的標準因子を比較して得られる差に現れる因子の係数の極小値である。これは高次元では定義以上の性質はほとんど分かっていない。本研究では、極小対数的食違い係数の性質をフリップの終止予想の視点から解明することを掲げている。

終止予想は Shokurov によって極小対数的食違い係数についての二つの局所的な問題に帰着されている。一つは、ある降鎖律を満たす多様体の族が与える極小対数的食違い係数の集合の昇鎖律であり、もう一つは、多様体の閉点上の極小対数的食違い係数の下半連続性である。とりわけ昇鎖律は3次元の場合ですら未解決である。本研究の目的は、3次元極小対数的食違い係数の昇鎖律を証明することによって極小対数的食違い係数の系統的研究を拓くことである。

3. 研究の方法

3次元極小対数的食違い係数の昇鎖律を追究し、昇鎖律を一般次元で導くための帰納的議論を探る。

(1) 対象を非特異多様体に限定するとき、イデアルの列の極限を形式的べき級数環上に構成することができる。これをイデアルの生成極限と呼ぶ。生成極限の定める極小対数的食違い係数は元のイデアルたちの定める極小対数的食違い係数の極限となることが予想され、これから昇鎖律が導かれる。3次元非特異多様体上の1以上の極小対数的食違い係数については私がこの予想を示して昇鎖律を証明しているので、残された1未満の係数の昇鎖律を考える。

その方法として、生成極限を介して昇鎖律と同値になる中村の有界性予想に取り組む。すなわち、代数多様体と境界イデアルの指数が固定されたときの、極小対数的食違い係数を計算する因子の多様体自身に関する対数的食違い係数の有界性である。3次元非特異多様体上では境界が標準特異点を定めるイデアルと極大イデアルのべきの積に分解する状況に帰着させていて、生成極限の定める組が曲線に沿って真に対数的標準特異点を持つ場合が問題となる。対数的標準特異点とは極小対数的食違い係数0以上の特異点である。私は、生成極限の極小対数的食違い係数を計算する因子は曲線上の対数的食違い係数0の曲面に導入される組に制限されて現れるという、逆同伴の理論を応用したい。曲面上の極小対数的食違い係数を計算する因子は重み付き爆発で得られるという私の結果が応用できるからである。

(2) 3次元では極小対数的食違い係数が1より大きい端末特異点は完全に分類されている。一般の3次元多様体上の極小対数的食違い係数の昇鎖律を考察するときには、極小対数的食違い係数1未満の特異点が本質的な対象である。

LMMPによれば、そのような極小対数的食違い係数を計算する因子は爆発写像の例外因子として幾何的に実現される。ところが対数的標準因子を制限して例外因子に情報を求めるためには、例外因子の係数を1にしなければならない。安直に係数を増やすと対数的標準特異点の圏を外れるが、それでも3次元のときは例外因子が曲面である事情から情報を演繹できる。

(3) 一般次元で極小対数的食違い係数の昇鎖律を導くには、次元に関する帰納的議論の枠組を構築しなければならない。私は3次元の研究を踏まえて、Birkarによる対数的Fano多様体の

有界性の証明の帰納的枠組を検討する。

消滅定理は対数的標準因子と豊富因子の和に伴うコホモロジーの消滅ゆえ、対数的標準因子自身の情報よりもむしろ商に対応する不変量である対数的標準閾の情報を提供する。対数的標準閾の昇鎖律は完全に証明されているから、閾の情報を総合して、共通の対数的標準因子が有する情報を引き出す。ここで対数的標準因子が反豊富に近い場合は、極小対数的食違い係数の諸問題が対数的 Fano 多様体の有界性へ帰着されることになる。

4. 研究成果

(1) 極小対数的食違い係数の昇鎖律を非特異な 3 次元多様体上で完成させた。この結果は 3 次元非特異多様体上において、

- ・ a 対数的標準閾の昇鎖律
- ・ 極小対数的食違い係数の統一的イデアル進半連続性
- ・ 中村の有界性

と同値であるから、これらをすべて示したことになる。なお、これらは固定された 3 次元端末商特異点上の主張へと拡張できる。

非特異多様体上の極小対数的食違い係数の昇鎖律は中村の有界性と同値であり、3 次元の場合、境界が標準特異点を定めるイデアルと極大イデアルのべきの積に分解する状況が残されていた。正確には極大イデアルの指数が $1/2$ 以下または 1 以上の場合に中村の有界性を証明しているため、標準特異点を計算するすべての因子に沿って極大イデアルが重複度 1 を持つときが問題である。これは曲面においては A 型の Du Val 特異点に相当するので、仮に半安定型の標準特異点と呼ぶことにする。

3 次元半安定型標準特異点の研究では、極小対数的食違い係数 1 を計算する因子の解明が重要である。そのような因子は 3 次元因子収縮写像の合成によって得られるが、さらに因子収縮写像は重み付き爆発であることが私の研究から知られている。一般に重み付き爆発の合成で得られる因子は直接の重み付き爆発で得られるとは限らない。ところで我々の重み付き爆発には、重みの組 $w, v, 1$ に対して傾斜と呼ばれる 1 以上の有理数 w/v が対応する。今回は、初めの重み付き爆発の傾斜が続く重み付き爆発の傾斜よりもほぼ大きいならば、合成が依然として重み付き爆発で実現されることを証明した。

3 次元非特異多様体上の極小対数的食違い係数の昇鎖律をイデアルの生成極限を用いて考察すれば、生成極限の定める組が曲線に沿って真に対数的標準特異点を持つ場合が問題であった。曲面上の私の結果を応用すれば、極小対数的食違い係数 0 を計算する因子は重み付き爆発で得られることがわかる。その重み付き爆発は、重みを $w, v, 0$ とおくと、極小対数的食違い係数 1 を計算する 3 次元重み付き爆発の列であって、傾斜が w/v に収束するような列の極限になっている。反対に極小対数的食違い係数 1 を計算する 3 次元重み付き爆発の列について、傾斜がほぼ w/v に収束するならば、重み付き爆発の極限は極小対数的食違い係数 0 を計算することを観察した。

特に半安定型の標準特異点の列を考えると、傾斜の極限が簡単な有理数でない限りは重みを揺することで、昇鎖律と同値である中村の有界性が従う。残る場合は極限が簡単な有理数から成る有限集合に属するときであるが、その集合上の帰納法と上述の重み付き爆発の合成に関する成果を用いれば、重み付き爆発を行ったのちには中村の有界性が成立することがわかる。特にイデアルの高次部分を切り取っても極小対数的食違い係数は同じである。

イデアルの高次部分を切り取ることで、それを変形によって重み付き斉次イデアルへと退化させられる。これによって非特異多様体上の極小対数的食違い係数の下半連続性を經由して、中村の有界性は退化イデアルについての有界性に還元される。退化イデアルの定める組は曲線に沿って真に対数的標準特異点を持つから、極小対数的食違い係数 1 以下の逆同伴の理論によって、極小対数的食違い係数を計算する因子が曲線上の対数的食違い係数 0 の曲面に導入される組に制限されて現れる。こうして退化イデアルについての主張は曲面上の昇鎖律に帰着させられるのである。

(2) 3 次元対数的因子収縮写像の分類問題を考察した。特に極小対数的食違い係数の昇鎖律問題の視点から、標準特異点を持つ 3 次元多様体上の因子を半安定型の標準特異点に収縮させる写像を研究した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Masayuki Kawakita	4. 巻 67
2. 論文標題 3次元の双有理幾何	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 141-152
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Masayuki Kawakita	4. 巻 30
2. 論文標題 On equivalent conjectures for minimal log discrepancies on smooth threefolds	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Journal of Algebraic Geometry	6. 最初と最後の頁 97-149
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/jag/757	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 Masayuki Kawakita
2. 発表標題 3次元の双有理幾何
3. 学会等名 第67回代数学シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masayuki Kawakita
2. 発表標題 ACC for minimal log discrepancies and divisorial contractions in dimension three
3. 学会等名 Algebraic geometry in Auckland（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masayuki Kawakita
2. 発表標題 Problems on threefold singularities
3. 学会等名 Danwakai at Saitama University (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masayuki Kawakita
2. 発表標題 On boundedness of divisors computing the minimal log discrepancy on a smooth threefold
3. 学会等名 Algebraic geometry international conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Website of Masayuki Kawakita https://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~masayuki

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------