様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６年　５月２４日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４２４

研究課題名（和文）ジーゲル保型形式と代数的保型形式

研究課題名（英文）Siegel modular forms and algebraic modular forms

研究代表者
伊吹山　知義（Ibukiyama, Tomoyoshi）

大阪大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：６００１１７２２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：ウェイトの行列式部分が３以上の、素数レベルの２次パラモジュラー形式について、Atkin-Lehner 対合の固有空間ごとの次元公式を明示的に与えた。
３次までの主偏極超特異アーベル多様体の a-number に応じた細分の交差の様子について、パラホリック部分群による特徴づけを与えた。
ジーゲル上半空間上の関数に対する定数係数線形微分作用素で、領域の対角ブロックへの制限について保型性を保つようなものは、保型因子への作用の様子のみで記述される標準基底で与えられることを示し、かつ標準基底全体の具体的な母級数を与えた。これを用いて、跡部、千田、桂田、山内とともに Harder 予想の部分的証明を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
パラモジュラー形式については１変数の志村・谷山予想の類似で、有理数体上定義されたアーベル曲面のゼータ関数がウェイト２のもので与えられるという Brumer の予想があり、 Poor, Yuen などが、ウェイト３以上のデータを用いて数値実験を行っている。我々の結果はこれに直接的な影響を与えている。超特異アーベル多様体のモジュライについては、一般次元の細かい一般論への基礎が低次元で検証された形になっている。我々の微分作用素の理論は次数２のヤコービ形式の決定、L 関数の特殊値、Harder 予想、周期に関する予想、slope の評価、など様々な数学での欠くことのできない道具として使用されている。

研究成果の概要（英文）：Dimension formulas of eigenspaces of the Atkin-Lehner involution of vector valued paramodular forms of degree two such that the determinant part of the weight is not less than 3 was given explicitly.
Configuration of the moduli locus of principally polarized super-singular abelian varieties of dimension less than 4 corresponding to each a-number was shown to be characterized by parahoric subgroups of quaternion hermitian groups.
We have shown that among linear differential operators with constant coefficients acting on functions of the Siegel upper half space,those that preserves automorphy under the restriction of the diagonal blocks have certain canonical basis which are characterized only by the action on the automorphy factor, and explicit formula for the generating series of the canonical basis was given. We applied it to prove a part of the Harder conjecture on congruences jointly with Atobe, Chida, Katsurada, and Yamauchi,

研究分野：整数論

キーワード：ジーゲル保型形式　代数的的保型形式　保型形式の次元公式　超特異アーベル多様体　ゼータ関数　保型形式の合同　保型形式上の微分作用素　ラングランズ予想

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

1.　研究開始当初の背景。

研究課題のタイトルである、代数的保型形式とは、代数群でそのアデール群の実成分がコンパクトになっているような群上の保型形式のことである。通常の保型形式は、実成分がエルミート対称領域と呼ばれる複素領域に対応しているときは、この領域上の解析関数とみなされ、これには古典的な楕円保型形式などが含まれる。たとえば対応する群が２次のシンプレクティック群のときの保型形式がジーゲル保型形式である。一方、この群と複素数体上では同型だが、実数体上ではコンパクトになるような群（コンパクト実形 USp(2)）を考えると、これは複素領域に対応しているわけではないが、アデール群上の関数で考えると、自然に保型形式が定義できる。これは USp(2) の表現空間の離散群に関する不変性を満たすベクトルのことであり、表現空間の取り方に応じて、実は適当な多項式からなるベクトルと解釈でき、非常に具体的な対象である。このようなものを代数的保型形式と言う。古典的には Eichler による、楕円保型形式と、特殊線形群のコンパクト実形である SU(2) の代数的保型形式の間の L 関数を保つような同型対応が有名であった。シンプレクティック群の時にこのような同型を初めて問題にしたのは１９６４年の伊原康隆の論文であるが、今ではもっと一般化されて、ラングランズ対応と呼ばれている。しかし具体的に離散群や new form を指定した精密な予想が述べられている場合は少ない。実際にこの研究を始めた当初には、筆者が１９８０年代に提唱し、その後（一部北山秀隆との共同研究で）一般化した、２次パラモジュラー形式（ある特殊な離散群に対するジーゲル保型形式）と、定符号の四元数的エルミート群上の、非主種な格子の固定群に関する代数的保型形式の間の具体的な対応予想などがあるのみであった。この対応予想では、実例計算とともに、両者の次元公式を具体的に計算して比較し、その一致を示したことが大きな根拠だった。両者の比較においては、斎藤黒川リフト、吉田リフトなどを両者からうまく除外し、またパラモジュラー形式の new form （レベルが低い群とは群の包含関係がないにも関わらず trace map で当該のパラモジュラー形式に埋め込んでその部分を除外する）を定義するなどのいくつかの新しい発想が必要なのだが、それでも他の離散群に比べて、対応の形がすっきりしており、ラングランズ予想を証明する典型的なターゲットとなり得る形であった。また歴史的に見て、昔はその名前も知られておらず、あまり注目を引かなかったパラモジュラー形式については、近年、「有理数体上の楕円曲線の L 関数はすべてウェイト２の楕円保型形式からくる」という志村谷山予想の一般化で、有理数体上の特徴的なアーベル曲面の L 関数は、ウェイト２のパラモジュラー形式から来るだろうという A. Brumer の予想や、B. Robert と R. Schmidt による new form の理論により脚光を浴びるようになってきていた。今回の研究開始当初には、筆者たちの研究により、概ね次のようなことが知られていた。

（1）シンプレクティック型の代数的保型形式やパラホリック群全体に関する、ウェイトの行列式部分の指数が３以上の２次ジーゲル保型形式の次元公式、

（2）シンプレクティック型の代数的保型形式と超特異アーベル多様体の様々な不変量の関係、

（3）領域の制限に対して保型性を保存する微分作用素の理論的な裏付けと、それを具体的なアイゼンシュタイン級数のプルバック公式などに応用して L 関数の特殊値や、保型形式の間の合同の証明に応用が可能であること。

ウェイト２のパラモジュラー形式の次元公式は、そもそも跡公式などの収束の限界から一般的次元公式が求められる可能性はないと思われているが、それでも前記の Brumer 予想の証明を実例に対して試みるのに、C. Poor, D. Yuen などがウェイトのより高い保型形式の次元を応用することにより、様々なレベルに対してウェイト２の次元を実験的に求めており、そのためには空間をなるべく細分しておく方がわかりやすいので、Atkin-Lehner 対合でプラス部分とマイナス部分に分けたときの次元がどうなるかなどが大きく関心を引いていた。一方で、筆者は１９９０年代より、ジーゲル保型形式上の微分作用素の研究も行っていた。ジーゲル保型形式をジーゲル上半空間の対角ブロックに制限すると、これもまた対角ブロック上の保型形式になることは当然である。ところでジーゲル保型形式に定数係数線形微分作用素を作用させ、その後対角ブロックに制限すると、これがまた保型形式になるような作用素が存在する。このような微分作用素は、実は整数論的に非常に有用であることがわかっていた。P. Garrett, S. Boecherer などの理論により、n 次のジーゲル保型形式の情報は実はすべて 2n 次のジーゲルアイゼンシュタイン級数の、２つの n 次対角ブロックへの制限により記述されることがわかっている。ここで 2n 次ジーゲルアイゼンシュタイン級数に上記の微分作用素を作用させたのちに対角ブロックへ制限すると、ヘッケ固有関数である同じ n 次ジーゲル保型形式のテンソル積の、標準 L 関数の特殊値を係数とする線形結合が得られることがわかっていた。ここで様々な微分作用素の作用に応じて、ジーゲル保型形式のウェイトと標準 L 関数の臨界点を様々にとれるのだが、これは、このような微分作用素を用いれば、標準 L 関数の臨界点での値が計算できるということでもある。このような引き戻し公式と呼ばれる公式を用いて、ジーゲル保型形式の間の合同関係式などが証明できるというアイデアを桂田英典が前から提唱しており、これにより、「２次ベクトル値ジーゲル保型形式の固有値は、ある素イデアルに対して一変数保型形式の固有値との合同がある」という Harder の予想に応用できるのではないかと思われていた。このような微分作用素の特徴づけの理論は 1990 年代に筆者により確立していたが、実際に応用する場合には、その

具体性が問題であり、これについては、使用する場面に応じて、非常に複雑な計算を実行し、工夫して、乗り切っている段階で、決定的な理論にはこの研究の当初にはまだ到達していなかった。特に具体的な微分作用素の作用で引き戻し公式の具体的な定数がどう決まるかという点が不明であり、これが応用上のネックであった。

２．研究の目的。

研究の当初の目的は、大雑把に言って次の３つであった。

（１）　２次シンプレクティック型の代数的保型形式とジーゲル保型形式の間の、ヘッケ環の作用と可換な同型を証明すること。またこれを Atkin-Lehner 対合のプラス 1 ないしはマイナス１の固有空間の対応に拡張すること。半整数ウェイトの２次ジーゲル保型形式と整数ウェイトの２次ジーゲル保型形式の間の L 関数を保つような対応に関する筆者の精密な予想を証明し、これをパラモジュラー形式の時に拡張すること。

（２）　２次ベクトル値ジーゲル保型形式のオイラー積が１変数の保型形式から決まる斉藤・黒川タイプのオイラー積と合同であろうという G. Harder による予想を、筆者の保型形式上の領域の制限に対して保型性を保つような微分作用素の理論を応用して解くこと。

（３）　主偏極超特異アーベル多様体のモジュライ軌道の成分の交差の様子を４元数的エルミート群ないしは付随する代数的保型形式の理論で記述すること。

これらを総合的に視野に入れながら、さまざまな関連する研究を行うことを目的としていた。

３．研究の方法。

２０１９年９月３０日から１０月４日まで、名古屋大学にて、桂利行、金銅誠之と共に Supersingular abelian varieties and related arithmetic というタイトルで国際研究集会を主催し、外国人研究者７名と日本人研究者６名が講演して、超特異アーベル多様体についての知見の集大成を行った。またパラモジュラー形式関連では、Computing paramodular forms という研究タイトルでアメリカ数学研究所の共同研究プロジェクト SQuaRE に３年間採択されていた。これは Jeff Breeding−Allison, Cris Poor, Hiroki Aoki と筆者の４人の共同研究プロジェクトであり、実際にはコロナの影響で、この科研費の研究期間中は 2019 年と 2023 年にしか直接会うことができなかったが、2022 年度には Zoom により、遠隔で一週間会合をおこなった。それ以外に、研究期間中の海外での研究として、トリエステ国際理論物理学センターでの Zagier との研究、オーベルヴォルバッハ研究所研究集会への参加討論と発表、ロシアのソチでのシリウス数学研究センターでの発表、中国アカデミアシニカ（台北）での Chia-Fu Yu との共同研究、および発表などを行った。また京都大学数理解析研究所の研究集会や日本数学会ほか、多数の国内研究集会に参加し、発表を行った。これらを通じて、専門家との研究討論をおこなった。ただし、コロナ流行の期間は Zoom での遠隔参加を余儀なくされた。また施設面では計算機をデスクトップ、ラップトップともに更新するとともに Mathematica 等の計算ソフトおよびそのサポートプログラムをいれて、研究上の計算に利用した。研究の技術的な方法等については、次の節でまとめて述べる。

４．研究成果。

この研究計画を立てた以降に、このテーマに関連して、非常に思いがけない進展がいくつかあった。そのひとつは、２次代数的保型形式とジーゲル保型形式の間の同型対応が証明されたことである。詳しくいえば、ある素数 p のみが分岐する４元数環上の２次エルミート群で、非主種を固定するような開部分群に関するを代数的保型形式と、２次の素数レベルのパラモジュラー保型形式の間の同型について、筆者が提唱していた予想が証明されたことである。これは、はじめ P. van Hoften により幾何学的に証明され、そののち M. Roesner と R. Weissauer により跡公式により証明された。これにより、今回の研究テーマのうちの一つが実現されたことになった。さらには、これらの証明を受けて、N. Dummigan, A. Pacetti, G. Rama, G. Tornaria はパラモジュラー形式に対する Atkin-Lehner 対合の固有空間と、四元数的エルミート群の非主種に対する代数的保型形式の Atkin-Lehner 対合の固有空間との間に、リフトと old form を除外した部分に同型対応があることを証明したのである。これはわれわれのプロジェクトに大きな手段をもたらした。この新たに証明された事実を用いて、ウェイトの行列式部分が３以上の素数レベルのパラモジュラー形式の Atkin-Lehner 固有空間の明示的次元公式が今回証明できた。これは大きな成果であって、重要な結果なので少し詳しく具体的に説明する。まず４元数的エルミート極大格子の種は素数レベルでは２種類あって、一つを主種、もう一つを非主種という。実際には非主種はパラモジュラー形式に対応する。主種は middle parahoric と呼ばれる離散群のジーゲル保型形式に対応すると予想されている。４元数環上の２次行列で極大４元数的エルミート格子を保つような元の全体は極大整数環になるが、これらはみな同型である。しかし、４元数的エルミート群による共役ではない。一つの種の中で、このような極大整数環全体を、４元数的エルミート群による同型で分類するしたときの同型類の個数を筆者はタイプ数と定義した。筆者の以前の研究で、極大格子の種のタイプ数は、主種の場合も非主種の場合も、レベルが偶数でないならば、ある５元２次形式の類数と等しいことが証明されていた。またこのタイプ数が実はウェイトが０の代数的保型形式の Atkin-Lehner 対合のプラス１に対応する固有空間の次元であることも分かっていた。非主種の場合には、奇素数レベルでは、パラモジュラー形式のウェ

イト３、ないしは代数的保型形式のウェイト０、の部分では、リフトや old form の部分がたまたま消えているので、両者の次元は完全に一致しており、５元２次形式の類数と、プラス１の固有空間になるウェイト３のパラモジュラーカスプ形式の次元プラス１が、Dummigan たちの結果により、一致することがわかっている。そこで、５元２次形式の類数が問題になるのであるが、これについては、１９７０年代の浅井照明の研究で完全に明示的な公式が分かっており、これが次元公式になる。といっても実際には１９個の異なる数値の和であるから非常に複雑な公式である。さて、ウェイトが一般だと様々なことが異なってくる。まず、５元２次形式に付随する代数的保型形式の次元が問題になる。これは実は類数公式というのは、５次直交群の元において、固定された主多項式ごとの類数への寄与を与える一種の体積公式の和として公式が与えられており、またウェイトで決まる SO(5) の表現の指標は主多項式にしかよらないので、この体積公式に指標をかけて和をとると、ウェイトが一般の代数的保型形式の次元公式が得られることが証明できる。SO(5)の表現の指標は古典的に H. Weyl によって公式が与えられており、これらを用いると、代数的保型形式の Atkin-Lehner プラス部分の次元公式が一般に得られることになる。またレベルが２の場合はタイプ数と類数の関係が不明なので、５元２次形式の類数公式が使えない。この場合は、非主種の類数が１であることがわかっているので、格子の自己同型群を具体的に求めることができて、これの応用で Atkin-Lehner 対合を決めるヘッケ作用素の元も個々の元の主多項式がなんであるかを確定できるので、それから体積公式とタイプ数の公式を書きあげることができる。以上により、代数的保型形式の Atkin-Lehner プラスの次元公式は明示的に書くことができる。一般にはこれはパラモジュラー形式の次元公式とはそのままでは一致しない。実際には、代数的保型形式へのリフト、パラモジュラー形式へのリフト、パラモジュラー形式の old form の部分を引いたうえで比較しなければならないので複雑である。しかし、どのようなリフトが Atkin-Lehner プラスとマイナスに分布しているかは Dummigan たちの結果で特徴づけがわかっている。またパラモジュラー形式の old form は素数レベルの場合は Sp(2,Z) からくる部分であり、これは斎藤黒川リフトの場合は一重に、またそれ以外の場合は２重に埋め込まれていることがわかっている。Sp(2,Z) の（ベクトル値を含むウェイトの）保型形式の次元公式が必要であるが、これはウェイトが大きいところは対馬竜司により、またウェイトが小さいところは D. Peterssen により知られており、これを用いると、結局、素数レベルのパラモジュラー形式のプラス部分の次元がわかる。プラスマイナスを合わせた次元はもともと筆者により知られていたので、これでマイナス部分の次元公式もわかることになり、Atkin-Lehner 対合で分解したそれぞれの固有空間の次元公式がわかったことになる。（実はたとえばウェイトが４のときは Cris Poor と D. Yuen の具体的な個別計算により、素数レベルでは 599 以下ではプラス部分とマイナス部分の次元の表が与えられており、われわれの結果はもちろんこれと一致している。）この結果によりスカラー値のパラモジュラー形式ではプラス部分とマイナス部分の次元にはかなり偏りがあること（ウェイトのパリティーにより一方がかならず他方以上であること）も証明できる。またウェイト３はジーゲルモジュラー多様体の標準因子に対応するので、幾何学的な興味の対象であるが、ウェイト３が消える素数レベルは有限個しかなく、これらがなんであるかが正確に記述され、これは Gritsenko, Poor, Yuen などが問題にしていたことに回答を与えている。以上がパラモジュラー形式の次元に関する結果の解説である。

他の思いがけない進展とは、筆者の提唱していた半整数ウェイトと整数ウェイトのレベル１の２次ジーゲル保型形式の間の志村型対応予想が、石本宙により証明されたことである。この結果はベクトル値ジーゲル保型形式に対する Harder 予想は、半整数ウェイトのジーゲル保型形式に置き換えれば、同じ群に対するカスプ形式と Klingen Eisenstein 級数との合同に帰着するという筆者の証明方針を背後で支える結果である。半整数ウェイトのジーゲル保型形式は、正則または歪正則のヤコービ形式と同型であって、正則ヤコービ形式に関する荒川恒男の引き戻し公式と桂田流のアイデアが、保型形式の合同の証明に形式的には使用できるので、この方向の話を一定程度進めていた。ところが、Harder 予想に関しては桂田英典より、全く異なる、ベクトル値へのリフトを用いる証明方法の提案があり、これを精密に述べるためには、微分作用素の一層の研究が必要となった。その結果、実際には微分作用素の理論に新しい大きな進展があった。

よって次には微分作用素に関するこの研究成果を説明する。一般にジーゲル保型形式に作用する作用素としては、正則なものを非正則なものにうつす Maass の微分作用素というのが知られている。これは保型性をたもつ作用素なので、作用したのちに正則部分に射影すれば、異なるウェイトの正則保型形式が得られることになる。しかし、正則射影というのは、その実態があまりはっきりとはしない写像であり、具体的に計算できる対象というよりは抽象的に定義されたものである。我々が必要なのは正則ジーゲル保型形式なので、直接正則なものを正則なものに移す写像がほしい。よって、これに作用する定係数線形正則微分作用素を考える。定数係数ということは要するに座標に関する偏微分の複素数体上の多項式ということである。よって、n 次対称行列 T の成分の多項式のベクトルで、T の各成分にジーゲル上半空間の各変数に関する偏微分を代入した時に、どのような多項式が、作用素として、領域の対角ブロックへの制限に関して保型性を保つか、という多項式の理論になる。筆者が１９９０年代に与えた回答は、具体的なウェイトの増加は、n 次一般線型群 GL(n,C)の P(T)への作用 P(T)->P(ATA^t) で記述され、元のジーゲル保型形式のウェイト k は n 行 2k 次行列 X に対して、P(XX^t) が X に関する何らかの多重調和性で保証される（実際には対角ブロックに応じて決まる X の分割それぞれについて多重調和）というのが一般論であった。この理論は完全なる特徴づけを与えているので、完結し

た理論ともいえるのであるが、たとえば具体的にどうかけるのか、というような問いに対しては膨大な計算が必要であり、また定義した作用素が引き戻し公式の定数をどのように決めているのか、などがあまり判然としないなど、いろいろな新しい問題が生じる点もあった。いずれにせよ、これは特殊多項式論であり、たとえば、２次ジーゲル保型形式を１次ジーゲル保型形式に制限する写像に対しては、古典的なゲーゲンバウアー多項式で記述されるなど、古典理論の自然な一般化とみなせる数学である。さて、このような作用素が領域の制限に関して、保型性を保つ条件は、本来、保型因子への作用と、関数の変数変換に対する作用が複雑に絡み合っているはずである。しかし保型因子だけへの作用を考えるとどうなるだろうか。志村五郎は定係数微分作用素を普通の保型因子 $\det(Z)^{-k}$ に作用させたときに、これがどう書けるかを一般的に考える理論を与えた。$C[T]$ を n 次対称行列の成分の多項式環とするとき、ここには $GL(n,C)$ が作用しているが、微分作用素を与える多項式 $P(T)$ が、なんらかの既約表現に属していれば、作用した先は定数を除いて、$\det(Z)^{-k}P(1/Z)$ になるというのである。しかし、我々に必要な作用素は、どんな既約表現にも属さないことが普通であって、志村の理論は適用できない。実は前に述べた多重調和等の理論から、D. Zagier との共同研究で $C[T]$ の自然な基底(descending basis) の理論というのをすでに開発しており、これが我々の必要な微分作用素を記述するのに重要であることは前からわかっていた。このような多項式基底を全部与える母級数の理論というのも前から開発してあった。$C[T]$ の元は $n(n+1)/2$ 変数の多項式であるが、一つの基底は T の成分の様々な次数の単項式からなっている。よって、どの基底も $n(n+1)/2$ 個の非負整数の組のパラメーターに対応しているのが自然である。このような組をインデックスと呼ぼう。さて、index N に対応するわれわれの descending basis $P_N(T)$ を $\det(Z)^{-k}$ に作用させると、（定数倍のずれを除いて）Z^{-1} の成分の index N に対応する単項式かける $\det(Z)^{-k}$ になるという、実に驚くべき結果が、今回新しくわかった。ここで多項式の具体的な定義自身を述べるのは記号等が煩瑣になってできないが、そもそもこのような多項式の存在さえ、全然自明ではない。さらには母級数があるので、原理的に計算可能な多項式である。さて、以上は単に保型因子への作用を述べているだけだが、実際には、この多項式への $GL(n,C)$ の作用は、作用の像の単項式への $GL(n,C)$ への作用と可換であり、微分作用素のジーゲル保型形式への作用の対角ブロックへの制限がどのように保型性を保つかという条件は、結果的には像を見るだけでわかるのである。言い換えると、どのように descending basis をあつめてベクトルを作ると、領域の制限について、どのようなベクトル値のウェイトになる微分作用素かが、像のみで判定できるのである。像の記述は本質的にジーゲル上半空間ないしは正定値対称行列の空間上の関数のラプラス変換である。この証明には、多重調和多項式に関する特徴づけとともに、形式的実ジョルダン代数での一般論などが必要で、証明はそれなりに複雑である。以上により、領域の制限に対して保型性を保つ微分作用素の理論を最終的な形の理論に書き換えることに成功したと考えている。以上は Forum Math. に発表した。またジーゲル上半空間のみならず、一般の対称管状領域においても、同様の理論があることはわかっており、母級数の部分のみ、まだ不明である。さて、このような理論の利点は、引き戻し公式の定数が正確に書ける点にある。そもそも Garrett, Boecherer, 小島教知等の引き戻し公式において、微分作用素の保型因子に対する作用の部分が、値がよくわかっていなかった部分なので、これが上記のように解決した結果、引き戻し公式の不明な定数がなくなったので、正確な記述が可能になった。このような正確な記述は、たとえば、保型形式の間の合同式の証明等では欠くことができない。さて、先に述べた桂田英典の方針によって、Harder 予想のウェイトが行列式部分の巾が偶数等の一定の条件ある場合の実例について、跡部発、千田雅隆、桂田英典、山内卓也とともに共同研究を行い、日本数学会のジャーナルに発表し、この結果について、日本数学会より JMSJ 論文賞を受賞した。これ以外に、与えられたいくつかの保型形式から新しい保型形式をつくる、いわゆる Rankin-Cohen 型作用素についても新しい作用素を与え、S. Grushevsky, G. Mondello, R. Salvati Manni とともに主偏極アーベル多様体のモジュライの Slope への応用を与えた。

さて、主偏極超特異アーベル多様体に関連しては、まず固定された標数の代数的閉体上の超特殊ではない超特異アーベル曲面の主偏極の個数の公式を与え、また自己同型群をすべて決定して、標数 2 での Oort 予想に反例を与え、これを論文として発表した。また正標数の代数的閉体上の主偏極アーベル多様体全体のモジュライの中での軌跡を考えると、この軌跡は一般に既約ではないし、また、いわゆる a number （そのアーベル多様体に $Speck[x]/x^p$ がいくつ埋め込めるかという数）に応じて、一種の階層構造を持っている。これらを４元数的エルミート群のヘッケ作用素等を用いて理論づけるということも、研究目標であった。これに関して、３次元以下の時に、４元数的エルミート群のパラホリック部分群で特徴づけることに成功し、論文として発表した。これは２次元の場合に限っても新しい結果であり、また今後の高次元への一般化の試金石といえる結果である。

それ以外に、極大でない２次整環の古典的な種の理論について「ベルヌーイ数とゼータ関数」という荒川恒男、金子昌信との共著の本の新装版を出版するに際して、新たに執筆した。その後、これらはアデールで考えるとはるかにやさしい記述ができることに気が付いて、その方針で書き換え、２次整環の種指標に関するゼータ関数の明示公式についての金子・水野が最近発表した結果の別証明についても記述し、プレプリントした。本質的にサーベイ風であるが、古典論のもっとも簡便なまとめであると自負している。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計16件（うち査読付論文　12件／うち国際共著　1件／うちオープンアクセス　11件）

１．著者名 Grushevsky Samuel、Ibukiyama Tomoyoshi、Mondello Gabriele、Salvati Manni Riccardo	４．巻 2024
２．論文標題 Differentiating Siegel Modular Forms and the Moving Slope of A_g	５．発行年 2023年
３．雑誌名 International Mathematics Research Notices	６．最初と最後の頁 3442～3486
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnad203	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 ATOBE Hiraku、CHIDA Masataka、IBUKIYAMA Tomoyoshi、KATSURADA Hidenori、YAMAUCHI Takuya	４．巻 75
２．論文標題 Harder's conjecture I	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	６．最初と最後の頁 1339-1408
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/87988798	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 T. Ibukiyama	４．巻 2264
２．論文標題 Differential operators on Siegel modular forms and automorphy factors	５．発行年 2023年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku	６．最初と最後の頁 210-225
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	４．巻 B90
２．論文標題 Supersingular abelian varieties and quaternion hermitian lattices	５．発行年 2022年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 17-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	4．巻 59
2．論文標題 Supersingular loci of low dimensions and parahoric subgroups	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Osaka J. Math.	6．最初と最後の頁 703-726
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.18910/88493	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	4．巻 69
2．論文標題 Some Poisson formula on tube domains	5．発行年 2021年
3．雑誌名 Comment. Math. Univ. St. Pauli	6．最初と最後の頁 43--50
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14992/00021298	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Ibukiyama Tomoyoshi	4．巻 34
2．論文標題 Differential operators, exact pullback formulas of Eisenstein series, and Laplace transforms	5．発行年 2022年
3．雑誌名 Forum Mathematicum	6．最初と最後の頁 685-710
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1515/forum-2021-0162	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	4．巻 2197
2．論文標題 Pullback formula and applications	5．発行年 2021年
3．雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6．最初と最後の頁 184-198
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	４．巻 72
２．論文標題 Principal polarizations of supersingular abelian surfaces	５．発行年 2020年
３．雑誌名 J. Math. Soc. Japan	６．最初と最後の頁 1161-1180
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/82528252	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	４．巻 5-66
２．論文標題 Generic differential operators on Siegel modular forms and special polynomials	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Selecta Mathematica (N.S.)	６．最初と最後の頁 1-50
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-020-00593-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	４．巻 6-8
２．論文標題 Graded rings of modular forms of rational weights	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Research in Number Theory	６．最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40993-019-0183-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	４．巻 2148
２．論文標題 Siegel modular forms and special polynomials	５．発行年 2020年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 66-79
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

1．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	4．巻 89
2．論文標題 One-line formula for automorphic differentail operators on Siegel modular forms	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Abhand. Math. Semin. Univ. Hamburg	6．最初と最後の頁 17-43
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12188-019-00202-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama and Sho Takemori	4．巻 28
2．論文標題 Construction of theta series of any vector valued weight and applications to lifts and congruences	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Experimental Math.	6．最初と最後の頁 95-114
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10586458.2017.1353454	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	4．巻 71
2．論文標題 Quinary lattices and binary quaternion hermitian lattices	5．発行年 2019年
3．雑誌名 Tohoku Math. J. (2)	6．最初と最後の頁 207-220
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Tomoyoshi Ibukiyama	4．巻 2120
2．論文標題 Ihara lifts and conjectural correspondences between symplectic automorphic forms of genus two	5．発行年 2019年
3．雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6．最初と最後の頁 61-71
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計18件（うち招待講演　15件／うち国際学会　12件）

1．発表者名 伊吹山知義
2．発表標題 Differential operators on automorphic forms, special functions, and arithmetic applications
3．学会等名 第3回仙台保型形式ミニ研究集会（招待講演）
4．発表年 2024年

1．発表者名 T. Ibukiyama
2．発表標題 Dimension formulas of paramodular forms with involution
3．学会等名 RIMS conference "Research on automorphis forms"（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2024年

1．発表者名 T. Ibukiyama
2．発表標題 Genus character L-functions of non-maximal orders
3．学会等名 Academia Sinica(Taipei), Seminar on algebraic geometry（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名 T. Ibukiyama
2．発表標題 Dimensions of paramodular forms and algebraic modular forms with involutions
3．学会等名 Academia Sinica(Taipei), Seminar on algebraic geometry（招待講演）
4．発表年 2023年

1．発表者名
T. Ibukiyama

2．発表標題
Dimension of paramodular forms with Atkin-Lehner involution

3．学会等名
Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding theory, CIRM, France（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2023年

1．発表者名
伊吹山知義

2．発表標題
Genus character L functions of non-maximal orders and adeles

3．学会等名
日本数学会総合分科会

4．発表年
2023年

1．発表者名
T. Ibukiyama

2．発表標題
Differential operators on Siegel modular forms and Laplace transforms

3．学会等名
数理解析研究所研究集会（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2023年

1．発表者名
T. Ibukiyama

2．発表標題
Genus character L functions of quadratic order in an adelic way

3．学会等名
Arithmetic Seminar Day in Toyonaka（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2023年

１．発表者名
伊吹山知義

２．発表標題
符号付きパラモジュラー形式の次元公式

３．学会等名
日本数学会年会

４．発表年
2023年

１．発表者名
伊吹山知義

２．発表標題
ジーゲル保型形式上の微分作用素とラプラス変換

３．学会等名
日本数学会年会

４．発表年
2023年

１．発表者名
Tomoyoshi Ibukiyama

２．発表標題
Survey on quaternion hermitian lattices and its application to supersingular abelian varieties

３．学会等名
CIRM Luminy workshop: Arithmetic, Geometry, Cryptography and Coding theory（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2021年

１．発表者名
Tomoyoshi Ibukiyama

２．発表標題
Supersingular loci of low dimensions and parahoric subgroups

３．学会等名
京大数理解析研究所研究集会 「超特異曲線・超特異アーベル多様体の 理論と応用」（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

１．発表者名
Tomoyoshi Ibukiyama

２．発表標題
Automorphic differential operators and special functions

３．学会等名
Integrable Systems and automorphic forms (Sirius Math. Center, Russia)（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

１．発表者名
Tomoyoshi Ibukiyama

２．発表標題
Pullback formulas and applications

３．学会等名
Analytic, geometric and p-adic aspect of automorphic forms and L functions (RIMS, Kyoto)（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

１．発表者名
Tomoyoshi Ibukiyama

２．発表標題
A new pullback formula and a half integral version of Harder's conjecture on congruences

３．学会等名
Modular Forms, Oberwolfach workshop(Germany)（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Tomoyoshi Ibukiyama

２．発表標題
Supersingular abelian surfaces, automorphisms, and the trace formulas

３．学会等名
Supersingular abelian varieties and related arithmetics(Nagoya)（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名 Tomoyoshi Ibukiyama
２．発表標題 A survey on polarizations of superspecial abelian varieties and the field of definition
３．学会等名 Supersingular abelian varieties and related arithmetics(Nagoya)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 Tomoyoshi Ibukiyama
２．発表標題 A survey on quaternion hermitian lattices and algebraic modular forms
３．学会等名 Supersingular abelian varieties and related arithmetics(Nagoya)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計1件

１．著者名 荒川恒男、伊吹山知義、金子昌信	４．発行年 2022年
２．出版社 共立出版	５．総ページ数 316
３．書名 ベルヌーイ数とゼータ関数（新装版）ー整数論の風景ー	

〔産業財産権〕

〔その他〕

伊吹山知義オフィシャルサイト http://www4.math.sci.osaka-u.ac.jp/~ibukiyam/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Supersingular abelian varieties and related arithmetics	2019年～2019年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
イタリア	Univ.Roma, Sapienza	Internat. Center of Theor. Physics		
オランダ	Univ. Utrecht			
米国	Fordham Univ.	American Institute of Mathematics	Stony Brook Univ.	
ドイツ	Max Planck Institute for mathematics			
中国	台湾中央研究院			