

令和 5 年 6 月 2 日現在

機関番号：24405

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03426

研究課題名(和文)量子群研究の新展開

研究課題名(英文)New developments in the study of quantum groups

研究代表者

尾角 正人 (OKADO, Masato)

大阪公立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70221843

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：反射方程式の解の研究と量子アフィン(超)代数の表現論の研究を行った。前者では、まず3次元反射方程式の解から得る研究を行ったが、次第にi量子群の理論を用いる方法へと傾斜していき、最終年度にはi結晶という概念を効果的に活用して、A型の場合にすべての準分裂型佐武図形で組合せ論的K行列の具体形を得た。後者では、orthosymplectic超リー代数に付随するアフィン量子群の場合にq-振動子表現を含む適当な表現の圏を定義し、新しい表現の族を構成した。また、C型q-振動子表現とD型有限次元表現が、完全モノイダル関手によって互いに補間される関係にあることを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

反射方程式は、ヤン・バクスター方程式とともに境界付き1次元量子系や2次元統計力学系の可積分条件を与えるものである。この解が多く構成されたことによって可積分系研究への応用が期待される。量子アフィン超代数は、従来詳しく研究され、多くの応用をもたらした量子アフィン代数を拡張するものであり、超双対性を通じて量子アフィン代数の有限次元表現の圏とq-振動子表現の圏を関係づける。また、古くから表現論分野で知られているHoweの双対ペアの理論の量子アフィン類似とみなすこともでき、Howe理論を新しい視点で再構成することにも繋がる。

研究成果の概要(英文)：Solutions of the reflection equation and the representation theory of quantum affine (hyper)algebras are studied. In the former, we first studied a method to obtain from solutions of the three-dimensional reflection equation, but gradually shifted to a method using the theory of iquantum groups. In the case of type A, we obtained explicit forms of the combinatorial K-matrices for all quasi-split Satake diagrams. In the latter, in the case of affine quantum groups associated with orthosymplectic Lie superalgebras, we defined a category of representations including q-oscillator representations and constructed a new family of representations. We also found that q-oscillator representations of type C and finite-dimensional representations of type D are mutually interpolated by an exact monoidal functor.

研究分野：数学

キーワード：量子群 超リー代数 結晶基底

1. 研究開始当初の背景

量子群は1985年ごろに導入された概念だが、リー環や代数群の表現論、低次元トポロジーにおける不変量、可積分系の研究などに大きな変革をもたらした。量子群のなかでも代表的なヤンギアン、カツ・ムーディー・リー環に付随する量子展開環やその双対である量子座標環については理解が大きく進んだ。一方で、近年量子群研究は新たな展開を見せている。例えば、Clark-Hill-Wangは anisotropic 型超リー代数に付随する量子群の可積分表現に対して、柏原の意味での結晶基底の存在を示した。また、研究代表者らはアフィン A 型超リー代数に付随する量子群に対し、Kirillov-Reshetikhin (KR) 加群という特殊な有限次元表現を構成し、これが結晶基底を持つことを示した。上で述べた量子群の範疇には収まらないが、量子可積分系への応用という観点からは重要な楕円量子群や Ding-庵原-三木代数という新しい量子群の研究も進展している。他方では、研究代表者が取り組んできた結晶基底の組合せ論に関わる分野では未解決の問題が残されていた。他の研究領域での進展からアイデアを得て解決へ向けて前進する可能性も高い。それらの中で以下の問題に興味をもった。

(ア) アフィン量子超代数の表現論、q-振動子表現、超双対性

最近、超リー代数に付随する量子群の研究が進んでいる。先に述べた Wang らによる可積分表現の結晶基底の存在、研究代表者と研究協力者 Kwon によるアフィン A 型超リー代数に付随する量子群の結晶基底の存在の他にも、量子(超)代数の q-振動子表現、超双対性など興味深く、今後解明すべき問題が山積している。研究代表者らが q-振動子表現を発見したのは、量子可積分系における四面体方程式の解からヤン・バクスター方程式の解を得る過程からであった。この表現にも結晶基底が存在することが期待されているが、この表現は可積分ではなく確立されている一般論が使えないため、新しい手法の開発が必要である。最後の超双対性は、元々超リー代数の放物型表現の圏と古典リー代数の有限次元表現の圏との間の双対性のことで、Cheng-Lam-Wang によって導入された概念である。この超双対性についての Kwon との議論で、この双対性は代数をアフィン化してさらに量子展開環を考えることでも特殊な表現のクラスでは成立していると推測している。この予想の解明は今後の量子群研究の発展に大いに寄与するものと考えられる。

(イ) 例外型 KR 加群の結晶基底の存在の問題および $X=M$ 予想

研究代表者は $X=M$ 予想という予想に 20 年来取り組んできた。この予想はすべてのアフィンリー環について定式化されており、アフィンリー環の型が非例外型ときには 2017 年に研究代表者らにより解決した。 $X=M$ 予想はアフィン量子展開環の特殊な有限次元表現 KR 加群に関係しており、Kerov-Kirillov-Reshetikhin (KKR) 型全単射の構成によって証明することができる。アフィンリー環の型が例外型の場合、KR 加群の結晶基底の存在や KKR 型全単射の構成は特殊なケースを除いて未解決問題である。また KR 加群の結晶基底 (KR クリスタル) に付随して箱玉系という超離散可積分系が構成されるが、系に現れるソリトンの散乱則の組合せ R 行列という組合せ論的な写像による記述など、 $X=M$ 予想が解決された後も取り組むべき非自明な問題がまだ残っている。

(ウ) 一般化量子群の表現論

研究代表者と研究協力者の国場および Sergeev は、3次元格子模型の可解性条件である四面体方程式の解の簡約化から 2次元の可解性条件であるヤン・バクスター方程式の解を導出し、その対称性としてアフィン量子展開環のある一般化と表現を見つけた。この表現はテンソル積が完全可約で、結晶基底をもつことが予想されている。さらに、この一般化量子群は(ア)で述べた 2つの超双対な代数の仲立ちとなる量子群を与えていると推測している。

2. 研究の目的

本研究の目的は、可積分系との関連で新しい展開を見せている量子群の研究を強力に推し進めることである。具体的には「1. 研究開始当初の背景」で挙げた各項目(ア)~(ウ)についての研究を進展させていくことである。

3. 研究の方法

申請時は、以下の研究協力者に協力を仰ぎ、(ア)~(ウ)の研究課題を推進する予定だった。

氏名	所属	専門
Weiqiang Wang	バージニア大	表現論
Jae-Hoon Kwon	ソウル国立大	表現論
Travis Scrimshaw	クイーンズランド大(申請時)	組合せ論
国場敦夫	東京大	数理物理学
内藤聡	東京工業大	表現論
今野均	東京海洋大	数理物理学

(ア)については、研究協力者の Kwon との共同研究が申請時に継続していて、C 型のアフィン量子群の q -振動子表現については結晶基底の存在は解決の見込みが立っていた。(イ)の例外型の場合の予想の解決は困難が予想されるが、申請者は解決に向けての一つのアイデアを持っており、今後このアイデアを吟味していく予定だった。KR クリスタルの組合せ論的な性質については、研究協力者の内藤のレベル 1 のときの理論があるので、KKR 型全単射についてはすぐにも研究に着手でき、また Scrimshaw がプログラムを開発しているので活用することができた。(ウ)は(ア)がある程度進展した後、国場、Kwon と申請者の研究体制で進める予定だった。

本研究着手後は、研究課題(ア)が(ウ)と融合して進んだ一方、(イ)については手が付かずじまいに終わった。一方で、研究協力者として

渡邊英也氏(大阪公立大、学振特別研究員 PD、専門:表現論)

が加わったり、大学院生の研究テーマが研究代表者のものと一致したことがもとで、以下の 2 つの課題にも新たに取り組むことにした。これらも「量子群研究の新展開」というテーマからは時機を得たものといえる。

(エ) 反射方程式の解の研究

1 次元量子系や 2 次元統計力学系においてヤン・バクスター方程式とともに可積分性を保証する条件が反射方程式である。このためこの方程式の解(量子 K 行列)を見つけることは、可積分系を構成することに等しい。また、量子 K 行列に現れるパラメータ q を 0 にすることによって、境界付きセルオートマトンも副産物として構成できる。また近年、量子 K 行列の解を組織的に与えるための理論の進展が著しく、この分野の専門家である研究協力者渡邊氏からの知識提供を受け、研究を行うこととした。

(オ) フェルミ公式の研究

指導している大学院生の武中亮氏が頂点作用素代数について勉強をしていたこともあり、研究代表者が 2000 年頃に共同研究者とともに提出したアフィンリー環の最高ウェイト表現(最高ウェイトは頂点 0 に対応する基本ウェイトの正整数倍)の指標のフェルミ公式の予想の解決にそこの技術が応用できることが見込まれた

4. 研究成果

(ア) アフィン量子超代数の表現論、 q -振動子表現、超双対性

7 年ほど前に、研究協力者である国場敦夫氏とともに、研究代表者は 3 次元系の可積分性に関わる四面体方程式の解をしかるべく簡約化することによって量子アフィン代数の q -振動子表現が自然に現れることを発見した。その研究をソウル国立大学の研究協力者 Jae-Hoon Kwon 氏とともに引き継ぎ、 q -振動子表現をフュージョン構成法により高レベル化し、さらにその表現の結晶基底について研究した。5 年前の研究では、B 型の場合に q -振動子表現の古典極限が取れなかったが、超リー代数の専門家である Kwon 氏の助言により、古典極限が取れないケースは量子超代数の表現と考える方が自然であることがわかった。これは古典極限($q \rightarrow 1$) のときには超対称性として知られている事実であった。次の研究として、orthosymplectic 超リー代数に付随するアフィン量子群の場合に q -振動子表現を含む適当な表現の圏を定義し、新しい表現の族を構成した。そして、超双対性の理論のアイデアを用いて、C 型(D 型)既約 q -振動子表現と D 型(C 型)既約有限次元表現が、完全モノイダル関手によって互いに補間される関係にあることを明らかにした。これは古くから知られている Howe の双対ペアの理論の量子アフィン類似とみなすことができるものである。また、この研究は当初想定していなかった「(ウ)一般化量子群の表現論」の研究課題とも密接かつ本質的に関係するものであることが本研究中に明らかとなった。論文の完成は、最終年度内には間に合わなかったが、2023 年 4 月に完成させることができた。この種の超双対性は B 型など他のタイプにもあると予想され、また新しく構成された既約表現は(q -振動子表現ではまだ定義は曖昧だが)結晶基底を持つなどよい性質をもつことが期待されている。本研究の研究期間は終わってしまったが、この新しい研究を今後も更に発展させていく。

(エ) 反射方程式の解の研究

最初の研究として、一般化 q -オンサーガー代数に同型な量子アフィン代数の余イデアル部分代数を用いて量子 K 行列を得る方法を適用して、 A 型の基本表現、 B, D 型のスピン表現の場合に具体的に計算し、今までに知られている反射方程式の解と同定した。次の研究は、2005 年に研究代表者が国場氏、神戸大学の山田泰彦氏とともに境界付きの箱玉系（ある種の超離散可積分系）を構成したことに関わるものである。この箱玉系は組合せ論的な反射方程式の解から作られるものであり、本質的に 2 種類の解を発見した。これらは A 型量子群の対称テンソル表現の結晶基底と関係しており、 q が 0 に行く極限をとる前の量子 K 行列が存在することが強く示唆された。2 種類の解のうち 1 種類目については、最初の研究で A 型量子群のどのような余イデアル部分代数を考えればよいか特定されていた。今回の大学院生草野浩虎氏との研究で、依然不明であった 2 種類目については AII 型余イデアル部分代数であることが特定された。最終年度では、研究協力者渡邊氏、草野氏とともに、基本表現に対応するものからレベルが高い表現に対応するものを構成するフュージョン構成法を量子 K 行列の場合に具体的に書き下した。それとともに渡邊氏が新しく導入した i 結晶という概念を効果的に活用し、アフィン A 型対称テンソル表現の場合に現在適用可能なすべての準分裂型佐武図形に対応して、組合せ論的 K 行列の具体形を得た。

(オ) フェルミ公式の研究

研究代表者が 2000 年頃に共同研究者とともに提出したアフィンリー環の最高ウェイト表現（最高ウェイトは頂点 0 に対応する基本ウェイトの正整数倍）の指標のフェルミ公式の予想の解決に、大学院生の武中氏が学んでいた頂点作用素代数の技術が応用できることが見込まれたので、計算を進め、捻じれがあるアフィンリー環の場合に一つのタイプを除き解決して論文にまとめた。この結果を導くための副産物として、主部分空間、パラフェルミオン部分空間の指標のフェルミ公式も得られた。ちなみに、捻じれない場合は 2020 年に Butorac-Kozic-Primc により解決されている。また、上で除いた一つのタイプについての結果は武中氏が単独で論文を発表した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Masato Okado and Ryo Takenaka	4. 巻 -
2. 論文標題 Parafermionic bases of standard modules for twisted affine Lie algebras of type $A^{(2)}_{2l-1}, D^{(2)}_{l+1}, E^{(2)}_6$ and $D^{(3)}_4$	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Algebras and Representation Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10468-022-10145-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jae-Hoon Kwon and Masato Okado	4. 巻 57
2. 論文標題 Kirillov-Reshetikhin modules of generalized quantum group of type A	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Publ. RIMS	6. 最初と最後の頁 993-1039
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/57-3-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hiroto Kusano and Masato Okado	4. 巻 online
2. 論文標題 Solution to the reflection equation related to the quantum group of type A_{ll}	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Commun. Algebra	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2022.2036749	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Jae-Hoon Kwon and Masato Okado	4. 巻 -
2. 論文標題 Higher level q -oscillator representations for $U_q(C^{(1)}_n), U_q(C^{(2)}_{(n+1)})$ and $U_q(B^{(1)}_{(0,n)})$	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00220-021-04009-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Atsuo Kuniba, Masato Okado and Akihito Yoneyama	4. 巻 109
2. 論文標題 Matrix product solution to the reflection equation associated with a coideal subalgebra of $U_q(A^{(1)}_{n-1})$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Letters in Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 2049-2067
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11005-019-01175-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsuo Kuniba, Masato Okado and Akihito Yoneyama	4. 巻 52
2. 論文標題 Reflection R matrices associated with an Onsager coideal of $U_p(A^{(1)}_{n-1})$, $U_p(B^{(1)}_n)$, $U_p(D^{(1)}_n)$ and $U_p(D^{(2)}_{n+1})$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical	6. 最初と最後の頁 375202 (27pp)
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1088/1751-8121/ab3715	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Atsuo Kuniba and Masato Okado	4. 巻 4
2. 論文標題 Set-theoretical solutions to the reflection equation associated to the quantum affine algebra of type $A^{(1)}_{n-1}$	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Integrable Systems	6. 最初と最後の頁 1-10
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/integr/xyz013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

[学会発表] 計4件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 Masato Okado
2. 発表標題 Box-ball systems: reviews and recent developments
3. 学会等名 CRM Workshop "Box-Ball Systems from Integrable Systems and Probabilistic Perspectives" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Okado
2. 発表標題 Introduction to crystals and related combinatorics
3. 学会等名 MATRIX/RIMS tandem workshop "Integrability, combinatorics and representation theory" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Okado
2. 発表標題 Fermionic character formula --- Inspiration from Omar
3. 学会等名 Inspiration in Mathematical Physics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masato Okado
2. 発表標題 Quantum super duality
3. 学会等名 RIMS研究集会 Representation theory of algebraic groups and quantum groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>[プレプリント]</p> <p>H. Kusano, M. Okado and H. Watanabe, Kirillov-Reshetikhin modules and quantum K-matrices, arXiv:2209.10325. J.-H. Kwon, S.-M. Lee and M. Okado, Oscillator representations of quantum affine orthosymplectic superalgebras, arXiv:2304.06215.</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	国場 敦夫 (KUNIBA Atsuo)		
研究協力者	クォン ジェフーン (KWON Jae-Hoon)		
研究協力者	渡邊 英也 (WATANABE Hideya)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
韓国	ソウル国立大学			