

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：32665

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03430

研究課題名(和文) 整閉イデアルを用いた正標数の特異点の研究

研究課題名(英文) Research of singularity theory using integrally closed ideals in positive characteristic

研究代表者

吉田 健一 (YOSHIDA, Ken-ichi)

日本大学・文理学部・教授

研究者番号：80240802

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者は、Hilbert-Kunz重複度による正則局所環の特徴づけや正則でないCM局所環の下限に関する予想を研究してきた。本研究では、2次元CM局所環の極大イデアルに対して知られている、HK重複度と通常重複度に関する不等式を高次元化し、より一般の準素イデアルの場合に拡張することに成功した。また、応用としてF-符号に関する新しい不等式を提供した。この研究成果は、渡辺氏(日本大)、中嶋氏(京都産業大)らとの共同研究の成果として投稿した。他方、渡辺氏(日本大)、奥間氏(山形大)と共に幾何的イデアル(幾何種数イデアル、楕円型イデアル)の概念を導入し、その特徴づけを与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

HK重複度の概念は、研究代表者が渡辺敬一氏と共に2000年頃から研究した概念であり、我々が提供した予想は6次元以下の場合と完全交叉の場合以外は未解決である。この問題はHK重複度が「特異点の良さ」を表す指標となることを示しており、正標数の特異点の研究における重要な研究対象を提供し続けている。特に、本研究における我々の成果は高次元では不十分な成果であり、今後の発展が期待される。一方、幾何的イデアルの研究は有理特異点における整閉イデアルの理論を、2次元一般の正規特異点において展開することを可能にするものとして興味深い。また、研究対象として、正規還元種数と正規正接錐の重要性を示唆している。

研究成果の概要(英文)：We have investigated the lower bound problem on Hilbert-Kunz multiplicities, and gave a characterization of regular local rings in terms of HK multiplicity, and posed a conjecture on lower bound for HK multiplicities for singular Cohen-Macaulay local rings, which is an open question. In this research, we generalized an inequality with respect to the HK multiplicity and the usual multiplicity of the maximal ideal in 2-dimensional Cohen-Macaulay local rings to the case of any  $m$ -primary ideals in any dimensional Cohen-Macaulay local rings, and posed a new conjecture on F-signatures as an application. Furthermore, we submitted a research paper as a joint work with Kei-ichi Watanabe (Nihon Univ.), Yusuke Nakajima (Kyoto Sangyo Univ.) et.al. On the other hand, we introduced the notion of geometric ideals (pg-ideal, elliptic ideal) and gave a characterization of those ideals as a joint work with Kei-ichi Watanabe (Nihon Univ.) and Tomohiro Okuma (Yamagata Univ.).

研究分野：可換環論

キーワード：Hilbert-Kunz 重複度 幾何種数イデアル 楕円型イデアル 有理特異点 整閉イデアル

## 1. 研究開始当初の背景

研究代表者は渡辺敬一氏と共に 2000 年頃から Hilbert-Kunz 重複度を研究してきた。最初の成果は、Hilbert-Kunz 重複度 1 をもつ清純な局所環は正則局所環であるという定理であり、この定理は Kunz の定理の極限版とみなすことができる。また、正標数に限れば永田の定理として知られる定理を強めた結果でもある。この結果から、特異点を持つ局所環の Hilbert-Kunz 重複度の下限が問題になる。研究代表者と渡辺敬一氏(日本大)は、Hilbert-Kunz 重複度を定義した Monsky のアイデアに基づいて下限を予想し、4 次元以下の場合に証明を与えた。現在は完全交叉の場合の他、7 次元以下の場合に証明した論文が投稿されているが、一般次元では未解決である。さらに、重複度 2 に限ると、Hilbert-Kunz 重複度は F-符号と関係が深い。本研究の主結果の 1 つはこの方向から F-符号の評価にアプローチしている。さらに、研究代表者は有理特異点を理解するために、整閉イデアルの幾何学的アプローチに取り組み、幾何種数イデアルの定義を与え、環論的に同値な言い換えを与えていたが、本研究を始める前にはまだ十分な例が得られていなかった。さらに、正規還元種数の概念は既に定義されていたが、いわゆる相対的正規還元種数の概念との違いが知られておらず、一致するのではないかと予想されていた。

## 2. 研究の目的

本研究における「正標数の特異点の研究」の目的の 1 つは、Hilbert-Kunz 重複度の研究において「**極大イデアル**」のみについて知られている結果をより一般のイデアルの場合に拡張することである。極大イデアルは整閉イデアルの代表例であるから、拡張先として「**整閉イデアル**」に限定することは自然なことである。もう 1 つは既存の結果の多くは 2 次元の場合の結果であるため、この結果を**高次元化**することである。特に、3 次元の場合は一定の不等式は得られているが、2 次元ほど精密なものが得られていない。また、正標数の研究において「**有理特異点**」を理解することは重要である。しかしながら、有理特異点についてはまだ可換環論の研究において十分に理解されているとは言い難い。有理特異点の整閉イデアルの性質を抽象化したものが**幾何種数イデアル**である。幾何種数イデアルの可換環論を展開することが本研究の目的の 1 つである。さらに、幾何種数が小さい特異点のクラスとして(強)楕円特異点の概念が知られているが、これをイデアルの視点から一般化することも重要な目的である。

## 3. 研究の方法

### (1) Hilbert-Kunz 重複度と F-符号の研究

F 符号の理論に精通し、アイデアの豊富な Smirnov 氏(Basque Center for Applied Mathematics)、若手の Jeffries 氏(Nebraska-Lincoln 大学)の協力を得て、F-signature に関して発展した理論を用いて、Hilbert-Kunz 関数の精密な評価を与える。さらに、トーリック環の場合に詳細な結果を得るために、表現論的知識のある中嶋氏(京都産業大)の協力を得て、大きな F-符号を持つトーリック環を分類する。

### (2) 幾何種数イデアルと正規還元種数

幾何種数イデアルの概念は、2 次元の正規特異点に対して特異点解消の言葉を用いて定義されるが、環論的にはその Rees 代数が Cohen-Macaulay 正規代数になることと同値であることを示すことができる。これは有理特異点の整閉イデアルの理論を抽象化し、多くの特異点に広げた概念である。また、正規還元種数の概念を考察することで、幾何種数イデアルは正規還元種数が 1 のイデアルというとらえ方をすることもできる。本研究は研究代表者に渡辺氏(日本大)と奥間氏(山形大)を加えたグループで幾何学的(特異点論的手法を駆使して)継続研究中であるが、楕円型イデアルの研究においては Hilbert 係数などに詳しい Rossi 氏(Universita' degli Studi di Genova)をグループに加えて研究を行う。

## 4. 研究成果

### (1) Hilbert-Kunz 重複度の新しい評価

2 次元の Cohen-Macaulay 局所環の極大イデアルに関して、その Hilbert-Kunz 重複度と通常  
の重複度を評価する不等式があるが、研究代表者と渡辺氏、中嶋氏、Smirnov 氏、Jeffries 氏

との共同研究の成果の1つとして、この不等式をより一般の極大イデアルに付随するイデアルに一般化し、さらに高次元化することに成功した。また、F-符号に対する評価をいくつか与えた。また、大きなF-符号を持つトーリック環の分類を行うことに成功した。

## (2) 幾何種数イデアルの特徴づけと2つの正規還元種数が異なる例

研究代表者と渡辺氏、奥間氏は、幾何種数イデアルが正規還元種数1のイデアルであることを認識していたが、より広いクラスの正規イデアルを幾何学的アプローチで調査することにより、従来見つけることができなかった「2つの正規還元種数が異なる例」を発見することに成功した。これは初めての例であり、今後の正規還元種数の研究において役立つことが期待される。また、現在は本質的にこの例以外に同様の例が見つかっておらず、新しい例の提供が望まれる。

<新しく発見された例>

EXAMPLE 2.8 [27, Example 3.10]. Let  $g \geq 2$  be an integer, and let  $K$  be a field of char  $K = 0$  or char  $K = p$ , where  $p$  does not divide  $2g + 2$ . Then  $R = K[X, Y, Z]/(X^2 - Y^{2g+2} - Z^{2g+2})$  is a graded normal  $K$ -algebra with  $\deg X = g + 1$ ,  $\deg Y = \deg Z = 1$ . Let  $A = R^{(g)}$  be the  $g$ th Veronese subring of  $R$ :

$$A = K[y^g, y^{g-1}z, y^{g-2}z^2, \dots, z^g, xy^{g-1}, xy^{g-2}z, \dots, xz^{g-1}],$$

where  $x, y, z$  denote, respectively, the image of  $X, Y, Z$  in  $R$ . Then  $A$  is a graded normal domain with  $A_k = R_{kg}$  for every integer  $k \geq 0$ . Let  $I = (y^g, y^{g-1}z) + A_{\geq 2}$  and

$Q = (y^g - z^{2g}, y^{g-1}z)$ . Then the following statements hold:

- (1)  $p_g(A) = g$ .
- (2)  $\text{nr}(I) = 1$  and  $\bar{r}(I) = g + 1$ . Indeed,
  - (a)  $\bar{I} = I$  and  $\bar{I}^n = I^n = QI^{n-1}$  for every  $n = 2, \dots, g$ .
  - (b)  $\ell_A(\bar{I}^{g+1}/Q\bar{I}^g) = 1$  ( $\bar{I}^{g+1} = I^{g+1} + (xy^{g^2-1})$ ).
  - (c)  $\bar{I}^{n+1} = Q\bar{I}^n$  for every  $n \geq g + 1$ .
- (3)  $\bar{e}_0(I) = 4g - 2$ ,  $\bar{e}_1(I) = 3g - 1$ ,  $\bar{e}_2(I) = g$ , and  $\ell_A(A/I) = g$ .
- (4)  $q(nI) = g - n$  for every  $n = 0, 1, \dots, g$ ;  $q(gI) = q(\infty I) = 0$ .

## (3) 楕円型イデアルの導入と特徴づけ

研究代表者は、渡辺氏、奥間氏に加え、イタリアの Rossi 教授の協力を得ることで、楕円型イデアルを定義し、その特徴づけに成功した。実際、楕円特異点の任意の整閉イデアルは幾何種数イデアルか、楕円イデアルのいずれかであることが従う。さらに、2次元の Brieskorn 型の完全交叉に対して、その正規還元種数が2以下であるものを分類し、楕円特異点との比較を行うことで、既存の結果に対する別証明を与えることができた。さらに、強楕円イデアルの概念を導入し、強楕円特異点が「任意の整閉イデアルが強楕円特異点か幾何種数イデアルである正規局所環」として特徴付けられることを示した。

我々が研究している2次元正規特異点においては、幾何種数イデアルや楕円型イデアルは「幾何的イデアル」であり、その性質はしばしば対応する特異点解消とアンチネフサイクルの言葉で特徴付けることができる。本研究は、これらの幾何的イデアルを分類するという観点から、「正規正接錐の Gorenstein 性」の研究にシフトしつつある。この研究においては、ベースになる環は Gorenstein と仮定するが、幾何種数イデアルの場合には「正規正接錐の Gorenstein 性」は good イデアルという別の幾何的イデアルと深く関連しているように思われる。実際、good な幾何種数イデアルは、正規正接錐が Gorenstein になる正規還元種数1のイデアルとして特徴付けられる。最終年度の研究成果として、楕円型イデアルの場合に、正規正接錐が Gorenstein になるための必要十分条件として、対応するサイクルのオイラー標数が零であるという条件を与えた。結果として、幾何種数、または、正規還元種数が2以下の Gorenstein 環の極大イデアルに関する正規正接錐が楕円に Gorenstein になることを証明することができる。また、超曲面の極大イデアルに関する正規正接錐が Gorenstein にならない例を多く提供することができた。

< 楕円イデアルの特徴付け >

THEOREM 3.2. *Let  $(A, \mathfrak{m})$  be a two-dimensional excellent normal local domain containing an algebraically closed field  $k = A/\mathfrak{m}$ , and let  $I \subset A$  be an  $\mathfrak{m}$ -primary integrally closed ideal. Put  $\bar{G} = \bar{G}(I)$  and  $\bar{R} = \bar{R}(I)$ . Then the following conditions are equivalent:*

- (1)  $\bar{r}(I) = 2$ .
- (2)  $p_g(A) > q(I) = q(\infty I)$ .
- (3)  $\bar{e}_1(I) = e_0(I) - \ell_A(A/I) + \bar{e}_2(I)$  and  $\bar{e}_2(I) > 0$ .
- (4)  $\ell_A(A/\bar{I}^{n+1}) = \bar{P}_I(n)$  for all  $n \geq 0$  and  $\bar{e}_2(I) > 0$ .
- (5)  $\bar{G}$  is Cohen-Macaulay with  $a(\bar{G}) = 0$ .

When this is the case,  $I$  is said to be an elliptic ideal and  $\ell_A([H_{\mathfrak{m}}^2(\bar{G})]_0) = \ell_A(\bar{I}^2/QI) = \bar{e}_2(I)$ .

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 4件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Tomohiro Okuma, Maria Evelina Rossi, Kei-ichi Watanabe, Ken-ichi Yoshida	4. 巻 248
2. 論文標題 Normal Hilbert coefficients and elliptic ideals in normal 2-dimensional singularities	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Nagoya Math.J	6. 最初と最後の頁 779-800
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2022.5	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Jack Jefferies, Yusuke Nakajima, Ilya Smirnov, Kei-ichi Watanabe, Ken-ichi Yoshida	4. 巻 174
2. 論文標題 Lower bound on Hilbert-Kunz multiplicities and maximal F-signatures	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Math.Proc.Camb.Phil.Soc.	6. 最初と最後の頁 247-271
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S0305004122000238	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 T. Okuma, K.-i.Watanabe and K.Yoshida	4. 巻 149
2. 論文標題 The normal reduction number of two-dimensional cone-like singularities	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proc. Amer. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 4569-4581
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40306-018-00311-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Tony Puthenpurakal, Kei-ichi Watanabe, and Ken-ichi Yoshida	4. 巻 571
2. 論文標題 Strong Rees property of powers of the maximal ideal and Takahashi-Dao's question	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 297-315
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-52111-0_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 Giancarlo Rinaldo, Naoki Terai and Ken-ichi Yoshida	4. 巻 26
2. 論文標題 Licci level Stanley-Reisner ideals with height three and with type two	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Combinatorial Structures in Algebra and Geometry" NSA	6. 最初と最後の頁 123-142
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-030-52111-0_10	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Chihiro Enomoto and Ken-ichi Yoshida	4. 巻 141
2. 論文標題 Cleanness of Cohen-Macaulay ideals generated by at most five monomials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Rendiconti del Seminario Matematico della Universita de Padova	6. 最初と最後の頁 243-268
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/RSMUP/25	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tomohiro Okuma, Kei-ichi Watanabe and Ken-ichi Yoshida	4. 巻 44
2. 論文標題 The normal reduction numbers for hypersurfaces of Brieskorn type	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Vietnamica	6. 最初と最後の頁 87-100
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40306-018-00311-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shiro Goto, Naoyuki Matsuoka, Naoki Taniguchi and Ken-ichi Yoshida	4. 巻 59
2. 論文標題 The almost Gorenstein property in Rees algebras of contracted ideals	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Kyoto Math. J.	6. 最初と最後の頁 769-785
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1215/21562261-2018-0001	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計16件(うち招待講演 5件/うち国際学会 2件)

1. 発表者名 吉田健一, 奥間智弘, 渡辺敬一
2. 発表標題 Normal tangent cone of the maximal ideal for a certain hypersurface
3. 学会等名 日本数学会代数学分科会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 吉田健一
2. 発表標題 Normal tangent cones of symmetric numerical semigroup rings
3. 学会等名 東京可換環論セミナー(オンライン)(招待講演)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 吉田健一, 奥間智弘, 渡辺敬一
2. 発表標題 Gorenstein normal tangent cones
3. 学会等名 第44回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 吉田健一, 奥間智弘, 渡辺敬一
2. 発表標題 Gorenstein normal tangent cones
3. 学会等名 日本数学会2023年度秋季総合分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 吉田健一, 奥間智弘, 渡辺敬一
2. 発表標題 Gorensteinness for normal tangent cones of the maximal ideals of Brieskorn hypersurfaces
3. 学会等名 日本数学会総会代数学分科会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 吉田健一
2. 発表標題 Introduction to ring-theoretic properties of geometric ideals
3. 学会等名 Mini workshop on singularities -Various aspects of singularities (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 吉田健一, 奥間智弘, 渡辺敬一
2. 発表標題 Gorensteinness for normal tangent cones of elliptic ideals
3. 学会等名 日本数学会2022年度秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 吉田健一, 奥間智弘, 渡辺敬一
2. 発表標題 Gorensteinness for normal tangent cones of geometric ideals
3. 学会等名 第43回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2022年



1. 発表者名 吉田健一
2. 発表標題 A note on core(m) of Gorenstein local rings of reduction exponent 2
3. 学会等名 可換環論オンラインセミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉田健一
2. 発表標題 Strongly elliptic ideals and the core of ideals
3. 学会等名 第42回可換環論シンポジウム(オンライン)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉田健一, 奥間智弘, 渡辺敬一
2. 発表標題 2つの異なる正規還元種数
3. 学会等名 日本数学会総会代数学分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉田健一, 奥間智弘, 渡辺敬一
2. 発表標題 Strongly elliptic ideal
3. 学会等名 日本数学会総会代数学分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Ken-ichi Yoshida
2. 発表標題 Lower bound on Hilbert-Kunz multiplicities and some related results
3. 学会等名 IIT Bombay Virtual Commutative Algebra Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ken-ichi Yoshida
2. 発表標題 Two normal reduction numbers
3. 学会等名 東大可換環セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉田健一
2. 発表標題 Ulrich module と正標数の不変量
3. 学会等名 第64回代数学シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 奥間智弘, 渡辺敬一, 吉田健一
2. 発表標題 Normal reduction numbers of integrally closed ideals in a 2-dimensional cone-like singularities
3. 学会等名 第41回可換環論シンポジウム
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

日本大学 研究者情報システム  
<https://researcher-web.nihon-u.ac.jp/search/group-search?lang=ja>  
日本大学教員情報検索  
<https://kenkyu-web.cin.nihon-u.ac.jp/scripts/websearch/index.htm#>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------