1版

様　式　C－19、F－19－1、Z－19　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　6 年　6 月 17 日現在

機関番号：32689
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：19K03432
研究課題名（和文）非アーベル岩澤理論の新展開

研究課題名（英文）New Developments in Non-Abelian Iwasawa Theory

研究代表者
尾崎　学（Ozaki, Manabu）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：80287961

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究で得られた結果の概要は以下の通りである：１．有理数体Qの総虚な有限次拡大kとQの円分的Z^-拡大Ωの共通部分がQであるとき、最大不分岐Abel拡大L/kΩのガロワの構造がkのガロワ閉包を特徴付けることを示した．２．総実代数体k上の全円分拡大k(μ)/kにおいて、X(k(μ))がkのデデキントゼータ函数を完全に決定することを示した．３．代数体の有限生成pro-p-拡大において、類数がp-進的に収束することを証明し、p-進L函数を用いて類数とK_2-群の位数のp-進極限の間に簡明な関係式を発見した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
Dedekindゼータ函数と種々のGalois群や類群などの数論的対象物との関係性を追究することは数論における重要なテーマの一つである．本研究に於いて従来知られていなかった興味深いそれらの関係性を発見することができた．
また，研究の過程で新たな研究課題を見出すことができたので，今後の研究の一つの指針を与えることもできた．

研究成果の概要（英文）：The summary of the results obtained in this research is as follows:
1. For a totally imaginary finite extension k of the rational number field Q and the cyclotomic Z^－extension Ω of Q, when their intersection is Q, it was shown that the structure of the Galois group X(kΩ)=Gal(L/kΩ) of the maximal unramified Abelian extension L/kΩ characterizes the Galois closure of k. 2. Let k be a totally real number field. It was shown that X(k(μ)) completely determines the Dedekind zeta function of k. 3. For a finitely generated pro-p extension of an algebraic number field, it was proven that the class numbers of the intermediate fields converges p-adically, and a simple relationship was discovered between the p-adic limits of the class numbers and that of the order of the K_2-groups using the p-adic L-function.

研究分野：数論

キーワード：ガロワ群　類数　K-群　ゼータ函数

１．研究開始当初の背景

代数体のガロワ拡大のガロワ群とイデアル類群，ゼータ函数などの種々の数論的対象との関係性を追究することは数論における最も重要な課題の一つである。古典的岩澤理論は有限次代数体 k と素数 p に対して k の Z_p-拡大体 K という無限次代数拡大体上の最大不分岐アーベル p-拡大 L/K のガロワ群 X を完備群環 $\Lambda=Z_p[[Gal(K/k)]]$ 上の加群と捉えるという枠組みの下で，イデアル類群や制限分岐アーベル拡大のガロワ群とゼータ函数との関係のより深い理解をもたらした．
即ち，k が 1 の p 乗根を含む CM 体のとき，Λ-加群 X の構造に関する情報が k の最大実部分体 k^+ の p-進ゼータ函数から得られるという事実－岩澤主予想（Wiles の定理）－である，これは 19 世紀に発見された解析的類数公式を膨大に深化させたものと言うこともできる．
一方，Neukirch-内田の定理によれば有限次代数体 k は k の絶対ガロワ群 G_k によって完全に決定される．従って，非アーベルなガロワ群 G_k が k の Dedekind ゼータ函数を含むすべての数論的情報を持っていると言える．このことから示唆されるように，上の岩澤主予想を深化させるために，アーベル p-拡大 L/K のガロワ群 X の代わりに適切な非アーベル拡大，乃至は pro-p とは限らないガロワ群を考察することは自然であると考えられる．この思想の下に報告者は非アーベル岩澤理論を創始した．

２．研究の目的

本研究の目的は X が非アーベルガロワ群の場合を対象とする非アーベル岩澤理論を発展させることである．さらには，K/k が Z_p-拡大以外の無限次代数拡大の場合も研究対象として古典的岩澤理論の拡張を目指す．具体的には以下の通りである：

（１）岩澤主予想によれば k^+ の p-進ゼータが Λ-加群 X の構造をある程度決定すること言えるが，その逆は成立しない．つまり X だけではゼータを復元することはできない．さらには岩澤主予想は基礎体 k が CM 体の場合のみを対象としており，一般の有限次代数体に対しては適用できない．もちろん Neukirch-内田の定理により絶対ガロワ群 G_k は k の Dedekind ゼータを決定するが，G_k は余りに巨大で複雑な群であるから，より小さいガロワ群でゼータを復元するだけの情報を持つものを探す．

（２）代数体の Z_p-拡大における岩澤類数公式或いは報告者が発見した非アーベル岩澤公のような，無限次拡大における数論的不変量の挙動に関する新しい現象を見出す．

３．研究の方法

従来の非アーベル岩澤理論で培われた手法を駆使して研究を行う．同時に群論，トポロジー，表現論，非可換環論，数論的力学系などの数学分野から有効な手法を導入できないかどうかを検討しながら研究を進める．

４．研究成果

本研究で得られた研究成果は以下の通りである：

（１）k を有理数体 Q の総虚な有限次拡大で，Q の円分的 $Z^\wedge$-拡大 $Q^\sim$（$Z^\wedge$は Z の副有限完備化）との共通部分が Q であるものとする．そして $k^\sim:=kQ^\sim$として，$L/k^\sim$を最大不分岐 Abel 拡大とする．$X(k)=Gal(L/k^\sim)$には完備群環 $Z^\wedge[[Gal(k^\sim/k)]]$上の加群の構造が自然に入る．このとき，$X(k)$は k の Galois 閉包を完全に特徴付けることを示した．すなわち，k_1,k_2 が有理数体の総虚な有限次拡大であり，$X(k_1)$と $X(k_2)$が $Z^\wedge[[Gal(Q^\sim/Q)]]$-加群として同型であれば k_1 と k_2 の Galois 閉包は一致することを示した．さらに，k_1/Q が Galois 拡大であるならば $k_1=k_2$ が成立する．
　古典的岩澤理論においては素数 p を一つ固定して，有限次代数体 k の円分的 Z_p-拡大体 K 上の最大不分岐アーベル p-拡大のガロワ群 X が対象であったが，X はしばしば自明になることもあるくらいで k の情報を十分には持っていない．しかし上述の結果によれば，少なくとも基礎体 k が総虚の場合は k 上の円分的 $Z^\wedge$-拡大体上の（pro-ｐに制限しない）最大不分岐アーベル拡大まで考えれば，k の情報をある程度まで取り出せることが判った．

（2）総実代数体 k 上の全円分拡大 k(μ)/k（μは１の冪根全体）において、k(μ)上の最大不分岐アーベル拡大のガロワ群を X(k)とすると X(k)は自然に完備群環 Z^[[Gal(k(μ)/k)]]上の加群の構造を持つ．この X(k)が k のデデキントゼータ函数を完全に決定することを示した．つまり，k_1 と k_2 を総実代数体とするとき，X(k_1)と X(k_2)が Z^[[Gal(Q(μ)/Q)]]-加群として同型であれば，k_1 と k_2 のデデキントゼータ函数は一致する，特に k_1 と k_2 のガロワ閉包は一致する．

この結果も（1）と同様に基礎体 k に付随するあるガロワ群の構造から k の情報が引き出せるというものである．しかし（1）と異なる点は円分 Z^-拡大の代わりに，それよりも大きい全円分拡大を考えるところにある．これによって基礎体 k に関して（1）よりもより詳しい情報が引き出せることが判明した．

（3）代数体の pro-p-拡大における様々な数論的不変量の p-進極限に関して研究を行い研究成果を得ることができた．この研究の動機付けとなったのは，吉崎氏（東京理科大学）と植木氏（お茶ノ水女子大学）による，代数体の Z_p-拡大における類数の p-進収束性に関する先行研究である．報告者はこれを一般化して，まず代数体の有限生成 pro-p-拡大においても類数の非 p-部分が p-進的に収束することを証明した．その証明は有限 p-群の表現の詳細な分析を駆使して行われる．さらにアーベル体上の円分的 Z_p-拡大の場合に p-進 L 函数を用いて，Z_p-拡大の有限次中間体の整数環の類数と K_2-群の位数の p-進極限の間に簡明な関係式が存在することを示した．

類数も K-群の位数も p-進ゼータ函数の非負整数値を用いて記述されるでの，Z_p-拡大の中間体の p-進ゼータ-函数の特殊値の収束性と，その極限値の関係を分析することで上の事実を証明した．

岩澤理論は通常は Z_p-拡大における数論的不変量の p-部分の挙動に対して有効に働くのであるが，上の結果は寧ろ非 p-部分の挙動に関する結果と見做せる．類群，K_2-群以外の数論的不変量に関しても p-進極限の間に知られていない関係性があるものと思われる．また，これらのな極限値に何らか新しい数論的意味が見出せる可能性もある．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究協力者	藤井　俊 (Fujii Satoshi)	島根大学・教育学部・准教授 (15201)	
研究協力者	水澤　靖 (Mizusawa Yasushi)	立教大学・理学部・教授 (32686)	2024年4月より現職．それまでは名古屋工業大学所属．

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関