

令和 6 年 6 月 5 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03437

研究課題名（和文）ゼータ関数の特殊値と関係式を基軸とする数論の研究

研究課題名（英文）Research on number theory based on special values and relations of zeta functions

研究代表者

大野 泰生（Ohno, Yasuo）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：70330230

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,400,000円

研究成果の概要（和文）：Arakawa-Kaneko型多重ゼータ関数の特殊値に対して、和を等号付き多重ゼータ値で書く公式（和公式）を与えることに成功した。とりわけ、この型の関数のひとつであるKaneko-Tsumura多重ゼータ関数の特殊値について、和公式における和によって、双対公式の無限系列を与えることに成功した。これらの証明は、複数のパラメータをもつ母関数の積分表示を用い、超幾何関数の関数関係式を背景に持つ変数変換が鍵となる。また、Schur型多重ゼータ値について中筋氏との共同研究により、双対公式とその一般化の導出に、示唆に富む議論により成功した。中筋氏と武田氏との共同研究では更に複素一変数補間に成功した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

多重ゼータ値の張る環の構造は、数学の広範な領域に加え数理論理など他分野においても、重要な局面に登場する（一部は予想）。しかし多重ゼータ値と保型形式の関係、あるいはアソシエイタとの関係、等々の様々な場面で、詳細情報の理解が望まれているが現状うまく掴みとれていない。本研究は、古くから多くの情報が集積されている、超幾何関数を用いて多重ゼータ値の現象を理解すること、更には超幾何関数と多重ゼータ値の双方向的関係を理解することで、重要課題の多くに有益な情報と技術をもたらすことになる。超幾何的視点で、双対不変性をもつ和公式の無限系列や、Schur型多重ゼータ値の一般化双対公式を得たことは重要な進展である。

研究成果の概要（英文）：For special values of Arakawa-Kaneko type multiple zeta functions, we succeeded in giving a formula (sum formula) in which the sum is written in terms of multiple zeta-star values. In particular, for special values of Kaneko-Tsumura multiple zeta function, which is one of the functions of this type, we succeeded in giving an infinite series of sum formulas invariant under the dual transformation. The key to these proofs is the variable transformation using the integral representation of a generating function with multiple parameters and the functional relation of hypergeometric functions in the background. On the other hand, collaboration with Maki Nakasuji on Schur type multiple zeta values, we have succeeded in deriving the duality formula and its generalization to Ohno sum. Furthermore, in collaboration with Maki Nakasuji and Wataru Takeda, we have also succeeded in giving its complex one-variable interpolation.

研究分野：数論

キーワード：多重ゼータ値 多重ベルヌーイ数 荒川金子ゼータ関数 超幾何級数 Schur多重ゼータ値 大野関係式 一般超幾何関数 Jacobi-Trudi公式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

多重ゼータ値の張る有理数体上の無限次元ベクトル空間は次数付き環の構造を有すると考えられており、またその各次数すなわち各重さにおける部分ベクトル空間の次元のなす数列は、フィボナッチ数列に似た数列で上から抑えられ、それが次元そのものであると予想されている。ここで、各重さにおいて見かけ上定義される多重ゼータ値の個数に比して、予想次元が著しく小さいことは、多数の数学的に興味深い現象が絡んで生じている事象であると捉えられ、多重ゼータ値の間に成立する有理線形関係式の全体像の詳細な把握は、興味深い数学的現象を捉えるための重要課題になっている。多重ゼータ値の多様な関係式族の中で、特に基軸をなすものとして、双対関係式およびその報告者による一般化があるが、これらはこの対象の著しくかつ謎めいた対称性を表しておりその背後により大きな数学的現象が感じ取られる。また、モジュラー現象と呼称されている、保型形式環の部分空間の次元と多重ゼータ値の次元や関係式との関わりについても、繋がりが垣間見えている段階であって、現状よりも更に一般性のある包括的論拠を持つ理解を得ることが喫緊の課題である。

2. 研究の目的

1 と 3 の反復のインデックスを持つ多重ゼータ値に対する Zagier の予想を解き明かした Broadhurst らの研究や、重さ・深さ・高さの 3 パラメータを固定した和の 3 変数母関数と Riemann ゼータ値の関係を調べた Ohno-Zagier の研究などいくつかの過去の研究成果において、多重ゼータ値あるいはその和の母関数に超幾何関数が現れることが確認されている。それらの事例を通して感じとられるのは、超幾何関数の満たす多様な関係式から多重ゼータ値の満たす関係式をシステムティックに導出することが可能なのではないか、可能であればより統一の見地から、多重ゼータ値の多様な関係式族を解釈することが可能になるであろう、そして更には、逆に多重ゼータ値環における現象を超幾何関数の研究へ持ち込むという、相互情報交換が可能なのではないかということである。したがって、散発的とも言いうる状況にある、多重ゼータ値と超幾何関数の関係に関する成果の情報量を増やし、より詳らかに関係を解明し、超幾何関数のもつ豊富な情報を多重ゼータ値の環構造の解明に用いられるように理論を形作っていくことは重要なステップである。多重ゼータ値のもつ多様な双対関係や、モジュラー現象のより深い理解には、広い意味での超幾何関数からの解釈が役立つと思われる。

3. 研究の方法

多重ゼータ値と、多重ポリログと、超幾何関数および多重ベルヌーイ数がすべて交叉する対象として、Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数がある。その原型である、Arakawa-Kaneko 多重ゼータ関数は、正整数点における値は多重ゼータ値で与えられ、負整数点での値は多重ベルヌーイ数で与えられる。多重ベルヌーイ数とは、ベルヌーイ数の定義母関数に多重ポリログ関数を取り込んで一般化された数列である。この関数を原型として、Kaneko-Tsumura などによって多様性を持って定義された多重ゼータ関数の族を、Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数と呼んでいる。この Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数の特殊値およびその和に関して、筋の良い母関数を構成し、広い意味での超幾何関数の関係式との関係を探ることを行った。また、これも広い意味で超幾何関数 (Painleve 関数) と繋がりをもつ Schur 型多重ゼータ関数に対して、その特殊値の満たす対称性とその一般化について詳しく調べ、その成立背景について考察を行った。

4. 研究成果

Arakawa-Kaneko 型多重ゼータ関数、とりわけ、Arakawa-Kaneko 多重ゼータ関数および Kaneko-Tsumura 多重ゼータ関数、さらには、それらを多項式補間した、 t -Arakawa-Kaneko 多重ゼータ関数の特殊値の和の無限系列を考察し、各々の満たす和公式を、母関数を用いることで証明した。そして、特に Kaneko-Tsumura 多重ゼータ関数の特殊値の和については、その母関数が等号付き多重ゼータ値の和の母関数と一致することを示した。そのうえで、更にその母関数がある種のパラメータ変換で不変であることを解明、すなわち一般超幾何関数のもつ対称性との繋がりを捉えたことにより、双対関係式の無限系列を示した。先に述べた双対関係式については、Xu による解析的な異なるアプローチによっても同時期に同じ結果が得られていたことが後日判明したが、超幾何関数の観点から成立由来を詳らかにしている点や母関数の扱いの簡潔さ、対称性の鮮やかさにおいて、報告者のアプローチに価値があると考えている。

超幾何級数との関係が深い Schur 型多重ゼータ値については、中筋麻貴氏(上智大・東北大)との共同研究により多重ゼータ値の双対関係式を Schur 型多重ゼータ値版の双対関係式に拡張することに成功し、更に、多重ゼータ値のいわゆる Ohno 関係式(一般化双対関係式)を Schur 型多重ゼータ値版の Ohno 関係式に拡張することに成功した。この過程では、Young 盤の双対を巧みに定義することや、admissible ピースと呼んだインデックスのパーツへの分解など新概念を導入しており、今後の当該分野の発展に寄与するものと考えられる。また、双対関係式の系統の関係式族にとって、元来は等号付き多重ゼータ値方面への拡張について困難性が伴っていたが、Schur 型多重ゼータ値は、通常 of 多重ゼータ値と等号付き多重ゼータ値との包含する補間の一般化であるため、等号付き多重ゼータ値側への拡張の議論を本研究は含んでいたが、今回の成果によって、単に等号付き多重ゼータ値全般にこの困難性があるのではなく、一部の例外を除くと、Schur 型多重ゼータ値という枠組みを用意することで、双対関係式を補間できることを明示したとも言え有意義である。Schur 型多重ゼータ値に関しては、更に、中筋麻貴氏(上智大・東北大)と武田渉氏(東京理科大)と報告者の3人の共同で、上述の Schur 型多重ゼータ値版の Ohno 関係式の一辺(0和)の一変数複素関数化(0関数)を行い、0関数としても双対性を維持することを導いた。したがって、Schur 型多重ゼータ値の枠組みに広げた一般化双対関係式の成立が、離散的な特殊値における一致現象ではなく、連続的な関数関係式としての現象であることが判明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Maki Nakasuji, Yasuo Ohno, Wataru Takeda	4. 巻 未定
2. 論文標題 An interpolation of the generalized duality formula for the Schur multiple zeta values to complex functions	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 掲載決定済
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 大野泰生, 山本修司	4. 巻 75(4)
2. 論文標題 多重ゼータ値の2-1公式	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 日本数学会 雑誌 数学	6. 最初と最後の頁 389-402
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Naho Kawasaki, Yasuo Ohno	4. 巻 23
2. 論文標題 The triangle algorithm for Bernoulli polynomials	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Integers	6. 最初と最後の頁 #A39
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.5281/zenodo.8028914	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Yasuo Ohno	4. 巻 B87
2. 論文標題 Relations among multiple zeta values and related generating functions	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku-Bessatsu	6. 最初と最後の頁 27-37
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuo Ohno and Yoshitaka Sasaki	4. 巻 17
2. 論文標題 Recursion formulas for poly-Bernoulli numbers and their applications	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 175-189
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S1793042121500081	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuo Ohno and Hirotsugu Wayama	4. 巻 68
2. 論文標題 Interpolation between Arakawa-Kaneko and Kaneko-Tsumura multiple zeta functions	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Commentarii Mathematici Univ. St. Pauli	6. 最初と最後の頁 83-91
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.14992/00020347	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuo Ohno and Yoshitaka Sasaki	4. 巻 84
2. 論文標題 Recurrence formulas for poly-Bernoulli polynomials	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 353-360
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08410353	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuo Ohno and Hirotsugu Wayama	4. 巻 84
2. 論文標題 Interpolated multiple zeta functions of Arakawa-Kaneko type	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advanced Studies in Pure Mathematics	6. 最初と最後の頁 361-366
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/aspm/08410361	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 11件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 多重ゼータ値の双対関係式の拡張
3. 学会等名 東北大学数学談話会
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 金子--津村の多重ゼータ値とその和の反芻
3. 学会等名 2023大分宮崎整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 Schur多重ゼータ値の双対関係式
3. 学会等名 名古屋組合せ論セミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 多重ゼータ値の双対関係式
3. 学会等名 日本数学会東北支部会特別講演（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 Schur多重ゼータ値の双対公式とその拡張
3. 学会等名 RIMS共同研究（公開型）多重ゼータ値の諸相（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 武田渉, 大野泰生, 中筋麻貴
2. 発表標題 Schur 多重ゼータ値の一般化双対公式の複素補間
3. 学会等名 日本数学会 秋季総合分科会 代数学分科会 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 Schur多重ゼータ値の0和の複素補間と双対不変性
3. 学会等名 2022大分熊本整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 Schur多重ゼータ値と双対関係式と
3. 学会等名 2021大分整数論研究集会（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 中筋麻貴, 大野泰生
2. 発表標題 Schur 多重ゼータ値の双対公式とその拡張
3. 学会等名 日本数学会, 年会, 代数学分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 荒川-金子ゼータ値の和公式
3. 学会等名 2020大分整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Kumi Kobata and Yasuo Ohno
2. 発表標題 Enumeration of cyclic automorphic hypergraphs
3. 学会等名 International Conference on Number Theory and Discrete Mathematics (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 大野泰生
2. 発表標題 6 or 5 tales on poly-Bernoulli and poly-Euler numbers
3. 学会等名 香川セミナー (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yasuo Ohno
2. 発表標題 On Arakawa-Kaneko type zeta functions
3. 学会等名 Multiple zeta values and related topics, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大野 泰生
2. 発表標題 多重ゼータ値の母関数について
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型) 可積分系数理の深化と展開(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yasuo Ohno
2. 発表標題 Relations among multiple zeta values and Arakawa-Kaneko zeta functions
3. 学会等名 Frontiers in Mathematical Science Research Workshop ---Joint workshop with Tohoku University and Shanghai University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計5件

国際研究集会 第17回多重ゼータ研究集会&第61回関西多重ゼータ研究会	開催年 2023年~2023年
国際研究集会 The 3rd Sendai Workshop on Multiple Zeta Values and Related Topics "Hypergeometric Series, Mahler Measures, and Multiple Zeta Values"	開催年 2019年~2019年

国際研究集会 Japan-Taiwan joint workshop on multiple zeta values	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 第13回多重ゼータ研究集会 & 第48回関西多重ゼータ研究会（共同開催）	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 第18回多重ゼータ研究集会&第64回関西多重ゼータ研究会	開催年 2024年～2024年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
オランダ	ナイメーヘン・ラドバウド大学			
その他の国・地域	国立台湾大学			