

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03439

研究課題名（和文）多次元数系におけるdigitの漸近的挙動の解析に対する加法数論の応用

研究課題名（英文）Application of additive number theory to the asymptotic behavior of digits in multidimensional numeration systems

研究代表者

金子 元 (Kaneko, Hajime)

筑波大学・数理物質系・准教授

研究者番号：10706724

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,500,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではrotational beta展開など、様々な数系におけるdigitの複雑度について研究を行った。特に、本研究では複素数を扱う数系に関するdigitの複雑度を解析できた点特徴である。特殊な整数として、平方数などの2進展開における複雑度を扱った。本研究では、複雑度を測る指標としてsum of digitを扱った。特に、sum of digitに関連のあるディオファントス方程式を研究した。さらに、線形回帰数列の小数部分の一様性に関する研究を行った。従来の手法では扱えなかった対象を数系で扱うことができるようになった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

Rotational beta展開という多次元数系におけるdigitの複雑さに関する研究成果に関して、先行研究を大幅に改良することに成功した。Digitの複雑さに関しては、疑似乱数などへの応用の観点からも重要である。また、sum of digitに関連のあるディオファントス方程式の解を考察する際に、従来のアルゴリズムを大幅に改良することに成功した。さらに、線形回帰数列の小数部分の明示公式を応用することにより、ディオファントス近似に関する新たな知見を得ることができた。特に、等比数列をはじめとする線形回帰数列の小数部分が取りうる範囲に関して、成果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：We investigated the complexity of digits in number systems such as rotational beta expansion. In particular, we have improved the estimation for the number of digit exchanges, which gives partial result for generalized Borel's conjecture on normality. We also investigated the complexity of the digits in the binary expansion of special integers. In particular, we researched the sum of digits. Improving the algorithm, we proved finiteness of the solutions of Diophantine equation related to sum of digits. Moreover, we have studied the fractional parts of linear recurrences, which is related to Diophantine approximation properties. We have investigated new formulae for the fractional parts of linear recurrences. Applying such formulae, we have treated the maximal limit points of the fractional parts of linear recurrences. We have discovered that the set of such points have analogous property as the Markoff-Lagrange spectrum.

研究分野：一様分布論

キーワード：一様分布論 ベータ展開 正規数 ディオファントス近似 sum of digit 線形回帰数列 ラグランジュスペクトラム 円分多項式

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

記号力学系における digit の一様性は、現代における重要な課題の一つである。例えば、代数的無理数の 10 進展開における digit が一様であると予想されている(Borel 予想)。しかし、この予想は非常に難しい未解決問題である。また、数系における digit の性質は整数論においても重要な研究テーマの一つである。例えば、2 進展開において digit が 1 のみから構成される素数はメルセンヌ素数と呼ばれる。メルセンヌ素数が無限に存在するかどうかは、digit に関する典型的な未解決問題の一つである。

また、digit の一様性はディオファントス近似理論と関連して研究がなされてきた。例えば Borel 予想は、公比 10 の等比数列に関するディオファントス近似の問題に言い換えることができる。この観点から、Borel 予想は部分空間定理などのディオファントス近似理論の手法を用いて、部分的な結果が得られてきた。Borel 予想に関して新たな知見を手に入れるために、一般の等比数列の小数部分に関して研究を進める必要がある。

### 2. 研究の目的

近年は、多次元連分数展開など種々の数系に関してエルゴード理論の観点からの研究が盛んである。ところが、エルゴード理論では具体的な数の digit に関する性質を導き出すことは難しい。本研究では代数的無理数などの digit に関する複雑性を解析することを目標とする。数系の中には、ベータ展開などのように写像の合成反復により digit が定義されるものがある。本研究では、このような数系における digit の複雑性を扱う。特に digit の複雑性に関して、複素数の digit 展開(例えば rotational beta 展開)における digit に関する研究成果はほとんど知られていなかった。本研究は、加法数論の手法を応用することにより、このような数系における digit の複雑性を解析することを目指す。

### 3. 研究の方法

(1) 日本大学における解析数論の専門家と、rotational beta 展開への加法数論の応用を検討した。特に、rotational beta 展開の一種である zeta expansion においては、加法数論の手法が特に有用であることが判明した。また、区分的線形写像の反復合成で定義された写像の反復合成によって定義された数系における digit の複雑性を、韓国および筑波大学の数学者とともに共同研究した。その結果、hot spot lemma の一般化を用いることで、digit の一様性を統一的に扱うことに成功した。

(2) 平方数の 2 進展開の複雑を測る指標として、sum of digit が知られている。本研究では、sum of digit と関連のあるディオファントス方程式について、フランスにおける数論の研究グループとともに、研究を行った。特に、整数の積に関する 2 進展開の構造を組み合わせたに考察することで、ディオファントス方程式の解を調べるためのアルゴリズムの効率を劇的に上げることに成功した。

(3) 新しい数系を導入することにより、等比数列および一般の線形回帰数列のディオファントス近似を解析できることが判明した。これは、大阪公立大学及び筑波大学の数学者との共同研究である。特にこの数系の応用により、線形回帰数列の小数部分の研究に関して、記号力学系の知識が適用できるようになった。さらに、フランスのパリシテ大学の数学者との共同研究により、記号力学系とディオファントス近似の関係性について、より詳細な共同研究を行った。

### 4. 研究成果

(1) 代数的無理数の digit 展開に関する複雑性に関する指標として digit 変化数というものがある。従来の研究手法では、弱い成果しか知られておらず、しかも複素数の digit 変化数は知られていなかった。本研究で、過去の digit 変化数に関する評価式を劇的に改良することに成功した。実際、先行研究の評価式と比較すると、下からの評価式を指数オーダーで改良することに成功した。さらに、quasi-Pisot 数や quasi-Salem 数という特殊な複素数を使った rotational beta 展開における代数的無理数の digit 変化数を調べることに成功した。これは、加法数論の手法を複素数の展開に応用した初めての例である。これにより、Borel 予想の一般化に対する部分的な成果が得られたといえる。本研究に関する論文が査読付論文として受理された。

(2)先行研究では、整数の積に関する sum of digit の下からの評価式について、ほとんど知られていなかった。本研究では下からの評価式を、初めて明示的に与えることに成功した。評価式に関する本研究は国際共著論文(査読付)として受理された。また、上記の成果をアルゴリズムに応用することにより、平方数に関連のあるディオファントス方程式の解の有限性を証明することに成功した。新しいアルゴリズムにより、ディオファントス方程式の解を効率的に探索することができるようになったためである。解の有限性に関する研究成果についても、国際共著論文(査読付)として受理された。

(3)本研究では、まず Pisot 数を公比にもつ等比数列の小数部分の明示公式を用いることにより、小数部分の最大極限点に関する研究を行った。その結果、最大極限点のなす集合がもつ幾何学的性質を明らかにすることに成功した。特に、ラグランジュスペクトラムと呼ばれる幾何学的対象と類似の性質を持つことが判明した。本研究に関する成果は、査読付き論文として受理された。また Numeration に関する国際的なオンラインセミナーにおいて成果を報告した。

さらに、一般の線形回帰数列の小数部分に関する明示公式を発見することにも成功した。これにより小数部分の最大極限点を解析できるようになった。その結果、一般の線形回帰数列に関しても小数部分の最大極限点がなす集合のもつ幾何学的性質を明らかにすることに成功した。特に、タイリング理論と一様分布論の関係が明らかになった。本研究に関しては、Numeration に関する国際的研究集会にて招待講演として報告した。また、本研究の成果をまとめた論文を投稿中である。

(4)エルゴード理論の概念に generic equivalence と呼ばれるものがある。これは、異なる数系を比較した時に、一様性の概念が一致するかどうかを問うものである。一様性の概念が一致するかどうかを判定することは、一般に非常に難しい。先行研究では、個別の数系に対して別々の手法が適用されていた。本研究により、統一的に generic equivalence を扱うことができるようになった。特に、非可算無限の異なる数系の族に対して、generic equivalence であることを証明することに成功した。本研究は国際共著論文(査読付)として受理された。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 7件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kaneko Hajime, Kawashima Makoto	4. 巻 241
2. 論文標題 The digit exchanges in the rotational beta expansions of algebraic numbers	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Number Theory	6. 最初と最後の頁 430 ~ 449
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jnt.2022.04.002	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Akiyama Shigeki, Kaneko Hajime	4. 巻 8
2. 論文標題 Curious congruences for cyclotomic polynomials	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40993-022-00410-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Aloui Karam, Jamet Damien, Kaneko Hajime, Kopecki Steffen, Popoli Pierre, Stoll Thomas	4. 巻 939
2. 論文標題 On the binary digits of $n$ and $n^2$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Theoretical Computer Science	6. 最初と最後の頁 119 ~ 139
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.tcs.2022.10.018	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Hajime Kaneko, Thomas Stoll	4. 巻 17
2. 論文標題 Products of integers with few nonzero digits	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Uniform Distribution Theory	6. 最初と最後の頁 11 ~ 28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2478/UDT-2022-0006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Shigeki Akiyama, Hajime Kaneko	4. 巻 380
2. 論文標題 Multiplicative analogue of Markoff-Lagrange spectrum and Pisot numbers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2020.107547	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 AKIYAMA SHIGEKI, KANEKO HAJIME, KIM DONG HAN	4. 巻 40
2. 論文標題 Generic point equivalence and Pisot numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Ergodic Theory and Dynamical Systems	6. 最初と最後の頁 3169 ~ 3180
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/etds.2019.46	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Hajime Kaneko, Wolfgang Steiner	4. 巻 -
2. 論文標題 Markoff-Lagrange spectrum of one-sided shifts	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematika	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 金子 元, Stoll Thomas	4. 巻 2222
2. 論文標題 ON THE SUM OF DIGITS IN THE BINARY EXPANSION OF PRODUCTS OF INTEGERS	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 206-211
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 金子 元	4. 巻 2259
2. 論文標題 New relation for the coefficients of cyclotomic polynomials	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku	6. 最初と最後の頁 73-81
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計21件 (うち招待講演 9件 / うち国際学会 8件)

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Multiplicative analogue of the Lagrange spectrum related to linear recurrences
3. 学会等名 DARFセミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 New relation for the coefficients of cyclotomic polynomials
3. 学会等名 解析的整数論とその周辺 (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 On the Diophantine equations related to the binary expansions of integers
3. 学会等名 数論とエルゴード理論
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Pierre Popoli
2. 発表標題 On the binary digits of $n$ and $n^2$
3. 学会等名 Diophantine Analysis and Related Fields 2023 (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 整数の積の2進展開に関する0でないdigitの個数について
3. 学会等名 解析的整数論とその周辺
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Multiplicative analogue of Markoff-Lagrange spectrum related to geometric progressions
3. 学会等名 エルゴード理論の最近の進展 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Analogy of Lagrange spectrum related to geometric progressions
3. 学会等名 One World Numeration Seminar (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Products of integers with few nonzero digits in binary expansion
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Analogy with the Lagrange spectrum for the powers of quadratic Pisot unit
3. 学会等名 Equidistribution: Arithmetic, Computational and Probabilistic Aspects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 秋山 茂樹
2. 発表標題 Normality equivalence and Pisot numbers
3. 学会等名 Equidistribution: Arithmetic, Computational and Probabilistic Aspects (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Analogy with the Lagrange spectrum for geometric progressions
3. 学会等名 Nancy-Metz number theory seminar (招待講演)
4. 発表年 2019年



1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Hensel's lemma and application for the base-b expansions of integers
3. 学会等名 Number Theory and Ergodic Theory
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 秋山茂樹
2. 発表標題 On multiplicative Markoff-Lagrange spectra
3. 学会等名 明学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Analogue of the Markoff-Lagrange spectrum and uniform distribution theory
3. 学会等名 Numeration 2023（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Pierre Popoli
2. 発表標題 On the binary digits of $n$ and $n^2$
3. 学会等名 Numeration 2023（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 代数的数のRotational beta展開におけるdigitに関して
3. 学会等名 東北確率論セミナー
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Lagrange spectrum in ordered shift spaces
3. 学会等名 Nancy-Metz number theory seminar (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Analogue of Markoff and Lagrange spectra on one-sided shift spaces
3. 学会等名 ワークショップ「数論とエルゴード理論」(国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 片側シフト空間におけるMarkoff-Lagrangeスペクトラムについて
3. 学会等名 数論セミナー
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 金子 元
2. 発表標題 Markoff and Lagrange spectra on one-sided shift spaces with cylinder orders
3. 学会等名 Diophantine Analysis and Related Fields 2024 (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 金子元
2. 発表標題 Multiplicative version of Markoff-Lagrange spectrum and geometric sequences
3. 学会等名 Mathematics Seminar (招待講演)
4. 発表年 2024年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関