様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　４ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４４０

研究課題名（和文）クラスター代数を用いた点付きリーマン面および組合せ論的表現論の研究

研究課題名（英文）Application of cluster algebras to punctured Riemann surfaces and combinatorial representation theory

研究代表者
山崎　玲（井上玲）（Yamazaki (Inoue), Rei）

千葉大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号：３０４３１９０１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：クラスター代数の表現論、可積分系への応用について研究を行った。有限次元単純Lie環gと正整数mに対してm周期的な箙を定義し、この箙の変異を用いてgのワイル群を構成した。特にqが1の冪根の場合、gに付随する量子群のq指標を含む有理関数体のうちこのワイル群作用で不変な部分を明らかにした。2020、2021年度はコロナ禍で予定していた研究活動が大きな制約を受けたが、2022年度以降は研究活動が徐々に回復し、多くの研究成果発表を行った。研究期間延長後の2023年度は3次元可積分系への応用という新しい課題に取り組み、四面体方程式と3次元反射方程式で大きな成果をあげた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
クラスター代数の表現論、3次元可積分系への新しい応用を見つけたことが本研究の大きな学術的意義である。本研究で構成したワイル群のクラスター代数による実現は、表現論だけでなくタイヒミュラー空間や可積分系でも様々な応用が見つかっている。このワイル群の実現はアフィンLie環の場合に拡張することができ、さらなる発展が期待される。3次元可積分系へのクラスター代数の応用は、これまで発見的に構成されていた四面体方程式と3次元方程式の様々な解を統一的に扱う可能性をもった新しい手法である。

研究成果の概要（英文）：We studied applications of cluster algebras to representation theory and integrable systems. For a finite dimensional simple Lie algebra g, we define m-periodic quiver and realize the Weyl group of g as mutation sequences of the quiver. In particular, when q is a root of unity we clarify the Weyl invariant subgroup of a rational functional field including the q-character of the qunatum group for g. In 2020 and 2021, our research activities were severely restricted due to the pandemic, but from 2022 onwards, our research activities have gradually recovered, and we gave a large number of research talks. In 2023, after extending the research period, we started the new challenge of applying cluster algebra to three-dimensional integrable systems, and achieved great results.

研究分野：数理物理学、可積分系

キーワード：クラスター代数　タイヒミュラー空間　ワイル群　量子群　q指標　四面体方程式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

2000 年ごろに Fomin と Zelevinsky によって導入された可換環の一種である「クラスター代数」は、「クラスター変換（mutation）という特徴的な代数的操作と類似のものが様々な数学・数理物理学に現れることから広く興味を持たれている。研究対象がひとたびクラスター代数の言葉で定式化されると、いろいろな計算や証明が系統的に実行できるという利点がある。

本研究の背景にあるのは「点付きリーマン面の幾何学とクラスター代数との関係」、および「ネットワーク（配線図）とクラスター代数との関係」の二つである。

(1) 点付きリーマン面の幾何学：Penner は 1980 年代に点付きリーマン面の基本群を考察し、Lie 群 SL2 の表現を用いて飾り付きタイヒミュラー空間を定義した。この方法はクラスター代数と非常に相性が良いことで知られる。具体的には、点付きリーマン面の三角形分割に双対な有向グラフがクラスター代数を定める箙になり、三角形分割の取り換えと箙の変換が整合的になる。この話を半単純代数群 G を用いた表現に一般化したのが 2000 年頃の Fock と Goncharov の成果である。その後の幾つかのグループの研究により、それぞれの G について三角形分割に配置する箙が分かってきた。
(2) ネットワークとクラスター代数との関係：実数正方行列で全ての小行列式が正であるものを全正値行列とよび、グラフの数え上げ問題や確率過程などいろいろな分野で現れるため応用上も重要である。1990 年代初めに、Lusztig は全正値冪等行列の「よい座標」と SLn 型の量子群の標準基底との間に共通する組合せ論的構造があることを発見し、全正値性の概念を一般の半単純群 G に拡張した。この研究がクラスター代数の出自であり、クラスター代数を応用した量子群の表現論や代数的組合せ論の研究に発展した。SLn の場合は n 次置換群の組み紐表現に相当する「配線図」を用いるのが便利で、n 次置換群の元の既約表示の取り換えに応じた配線図の変換と、配線図に双対な箙のクラスター変換が対応する。配線図に有向閉曲線を加えて一般化した図式は「ネットワーク」とよばれ、組合せ論とクラスター代数との深い関わりが様々な形で研究されている。

２．研究の目的

量子群の表現論に出自をもつ「幾何 R 行列」をクラスター代数の文脈で書き換えた我々の論文[Inoue-Lam-Pylyavskyy (2019)]のアイデアを広げ、幾何学、組合せ論的表現論および可積分系の新しい展開を生み出すことが本研究の目的である。

本研究開始前の状況は次のとおりである。上記の論文で構成した箙とそこに作用する幾何 R 行列は An 型のワイル群を実現する。そして、これを１.(1)の幾何学的設定では G=SL(n+1)の場合にあてはめることができ、リーマン面上の各点に作用するワイル群が得られる[Goncharov-Shen (2018)]。このようなワイル群作用は一般の G の場合にも構成できる[Goncharov-Shen(2019), Inoue-Ishibashi-Oya (2021)]。また、クラスター代数には Fock-Goncharov が導入した y 変数の非可換化（量子化）、および Berenstein-Zelevinsky が導入した x 変数の非可換化がある。幾何 R 行列を実現した箙は１.(1)(2)の両方と深くかかわっており、Fock-Goncharov の非可換 y 変数を用いて構成した幾何 R 行列の非可換化は、ネットワークの非可換化につながると考えられる。

このようなクラスター代数の現れ方を手掛かりに、クラスター代数をネットワーク変換の非可換化、量子群の表現論、組合せ論的表現論、および可積分な有理写像の研究に応用することを目指す。

３．研究の方法

大きく分けて次の 2 つの問題を考察し、以下のような方法で研究を進めた。

<u>量子群の q 指標とワイル群のクラスター実現</u>

2019～2022 年度は、有限次元単純 Lie 環 g と正整数 m に対して無限箙 Q(g)と m 周期的な箙 Q(g,m)を定義し、それぞれの箙に付随するクラスター代数的構造の量子群の表現への応用を考察した。(2020、2021 年度は COVID-19 の影響が甚大で、オンライン講義の準備等で研究に充てる時間が著しく減ったこと、予定していた研究集会参加や研究打合せがほぼ全てキャンセルまたは延期となったことで研究が停滞した。)

(1) 周期的箙 Q(g,m)を保つクラスター変異の列で、クラスターy、x 変数の生成する有理関数体上に作用するワイル群を成すものを構成した。g が A、D、E 型の場合には、Q(g,m)とワイル群は[Inoue-Ishibashi-Oya (2021)]で構成したものと一致しているが、それ以外の B、C、F、G 型の場合は異なっている。

(2) Frenkel-Reshtikhin は、1990 年代に量子群 Uq(g)の有限次元表現の指標、いわゆる q 指標を提唱した。q 指標は Uq(g)の有限次元表現の Grotherdiek 環からある可換変数 Y たちの生成するローラン多項式環への射として表される。我々は、無限箙 Q(g)の y 変数は、q 指標の構成要素となっているある変数と同じポアソン構造をもつことを示した。q が 1 の冪根のときも Frenkel-Mukhin によって q 指標が同様に定義されている。我々は、このとき変数 Y たちが生成する有理関数体 C(Y)を考えると、Q(g,m)に対して(1)で構成したワイル群作用が C(Y)上に拡張できることを示した。さらに q 指標の像がこのワイル群作用で不変であることを証明した。

(3) q 指標と戸田場の理論との関係と、以前の我々の論文[Inoue-Hikami2000]で導入した q 指標と離散戸田格子との関係と(2)の結果をつなぎ合わせることにより、離散戸田格子方程式のタウ関数がクラスターx 変数そのものであることを明らかにした。

(4) 前述の(2)で構成した有理関数体 C(Y)上のワイル群作用の不変部分を考察し、山﨑隆雄氏との共同研究で、不変部分体を特定した。

<u>クラスター変異を用いた 3 次元可積分性の研究</u>

2023 年度から、3 次元の可積分性を実現する四面体方程式および 3 次元反射方程式の解を構成するという新しい研究を開始した。きっかけは Sun と八木が 2022 年に提唱した、A3 型ワイル群の最長元に付随した配線図に triangle、square、butterfly という 3 種類の箙を配置することによって四面体方程式をクラスター変異列として表す方法である。彼らは量子クラスター代数を用いることで量子ダイログ関数と四面体方程式を結びつけた。本研究では次のようにこの方法を発展させた。

(5) triangle 箙は 1.(1)の幾何学的な背景をもつ A3 型の Fock-Goncharov 箙（FG 箙）と本質的に同じものである。我々は A3 型 FG 箙と配線図の関係を用い、配線図の頂点に配置した正準変数の組が成す q ワイル代数に量子 y 変数を埋め込むことによって、量子ダイログ関数を用いて四面体方程式の解となる R 作用素を得た。特に、R 作用素の随伴作用によって量子 y 変数の変異が表される。この解は、やはり量子ダイログ関数を用いて構成された[Maillard-Sergeev 1997][Bytsko-Volkov 2015]の解と関係する。

(6) C3 型ワイル群の最長元に付随する FG 箙を用いて、やはりクラスター変異によって実現される 3 次元反射方程式について考察した。(1)の作用素 R に加えて作用素 K を構成することに成功し、量子ダイログ関数を用いた 3 次元反射方程式の解を得た。我々の知る範囲では作用素 K は新しい解である。

(7) square 箙の場合に、(1)と同様な方針で、配線図の交点に配置した変数が成す q ワイル代数で量子 y 変数を表すことにより、四面体方程式の解となる R 作用素を構成した。この解はパラメーターの変換で[Sergeev 2020]の解に一致することが示された。

(8) Sun と八木の butterfly 箙を対称化した対称 butterfly 箙の場合に、(7)と同様な方針で四面体方程式の解となる R 作用素を得た。この R 作用素は、パラメーターの極限や変数変換によって[Kapranov-Voevodsky 1994]などの様々な知られた解と関係することが分かった。

いずれの場合も配線図の交点に配置された q ワイル代数という共通の代数やその表現（無限次元）を使って作用素 R を表示することができる。量子 y 変数を q ワイル代数に埋め込む際に複数の複素数パラメーターが入るのだが、このことは R 作用素、K 作用素に自然な形でスペクトルパラメーターが入るという大きな利点をもたらす。

どの R 作用素も、既に知られている幾つかの解との関係があり、これまで個々に構成されてきた四面体方程式の解を量子クラスター代数の側面から統一的に理解できるようになった。

４．研究成果

クラスター代数の量子群の q 指標への応用、そして 3 次元可積分性への応用について得た成果を合計 5 本の論文にまとめた。詳細は以下のとおりである。

<u>量子群の q 指標とワイル群のクラスター実現</u>

論文「Invariants of Weyl group action and q-characters of quantum affine algebras」では、3.(1)～(3)の研究をまとめた。この論文の査読コメントを受けて修正する過程で、このワイル群作用のトロピカル化が、Chari-Moura が 2005 年に導入したループ・ルート上への組み紐群作用と関係することを明らかにした。具体的には、我々のワイル群作用のトロピカル化を考え、その作用をトロピカル y 変数の適当な部分集合に制限すると Chari-Moura の組み紐群作用に対応付けられる。

論文「Invariants of Weyl group action and q-characters of quantum affine algebras」では、山﨑隆雄氏との共同研究で得た 3.(4)の成果をまとめた。q が 1 の冪根でない場合の q 指標について、20 年来にわたる未解決問題 (a)変数 Y へのワイル群作用の存在の有無、(b)ワイル群とスクリーニング作用素との関係 が知られていた。我々の論文では(a)を部分的に考察したものの完全ではなかった。この論文の公表後に、(a)(b)ともに[Frenkel-Hernandez 2022]で肯

定的に解決された。

クラスター変異を用いた 3 次元可積分性の研究

論文「Quantum cluster algebras and 3D integrability: Tetrahedron and 3D reflection equations」では、国場敦夫氏と寺嶋侑二氏との共同研究で得た FG 箙の場合 3.(5)(6)の結果をまとめた。この場合には、R 作用素、K 作用素の量子ダイログ関数部分がともに量子 y 変数の成す非可換環の完備化に収まるというよい性質がある。

論文「Tetrahedron equation and quantum cluster algebras」では、やはり国場敦夫氏と寺嶋侑二氏との共同研究で得た square 箙の場合 3.(7)の結果をまとめた。この R 作用素では、量子ダイログ関数部分が量子 y 変数の成す非可換環の完備化に収まらないという問題が起こり、作用素の正当性を確かめるのに付加的な議論が必要である。

論文「Solutions of tetrahedron equation from quantum cluster algebra associated with symmetric butterfly quiver」では、国場氏、寺嶋氏に加えて Sun Xiaoyue 氏、八木純也氏との共同研究で得た butterfly 箙の場合 3.(8)の成果をまとめた。この場合の R 作用素には square 箙のときと同様な R 作用素の量子ダイログ関数部分の問題が起こるが、同様な方針で解決できた。また、FG 箙の量子 y 変数が生成する斜体は butterfly 箙のほうの斜体に埋め込めることが分かった。さらに、パラメーターの極限をとることによって butterfly 箙の R 作用素が FG 箙の R 作用素に退化することを証明した。

ワイル群のクラスター実現とその応用について 2019 年度に 3 件、2020 年度に 1 件、2021 年度に 2 件、2022 年度に 1 件、2023 年度に 2 件の招待講演を行った。クラスター代数の 3 次元可積分性への応用については 2023 年度に 2 件の招待講演を行った。

また、これまでの離散可積分系とクラスター代数の応用に関する研究を総括するような大きな講演の機会があった。2022 年に CRM 研究所（モントリオール大学）の Aisenstadt Chair Lecturer に選ばれ、クラスター代数の表現論および幾何学への応用に関する連続講演を行った。2023 年には ESI（ウィーン大学）で離散・超離散可積分系についての連続講義を行った。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計7件（うち査読付論文　7件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　0件）

１．著者名 Rei Inoue, Tsukasa Ishibashi and Hironori Oya	４．巻 27
２．論文標題 Cluster realizations of Weyl groups and higher Teichmuller theory	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Selecta Mathematica	６．最初と最後の頁 84pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00029-021-00630-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Inoue Rei	４．巻 111
２．論文標題 Cluster realization of Weyl groups and q-characters of quantum affine algebras	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Letters in Mathematical Physics	６．最初と最後の頁 1 - 32
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s11005-020-01347-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Rei Inoue, Thomas Lam and Pavlo Pylyavskyy	４．巻 55
２．論文標題 On the Cluster Nature and Quantization of Geometric R-Matrices	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Publ. Res. Inst. Math. Sci.	６．最初と最後の頁 25 - 78
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/PRIMS/55-1-2 Published online: 2019-01-04	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 Max Glick、Rei Inoue and Pavlo Pylyavskyy	４．巻 7
２．論文標題 Soliton cellular automata associated with infinite reduced words	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Annales de L'Institut Henri Poincare D	６．最初と最後の頁 249 - 302
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/AIHPD/86	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1．著者名 Rei Inoue	4．巻 B78
2．論文標題 Cluster realizations of Weyl groups	5．発行年 2020年
3．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6．最初と最後の頁 225 - 233
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Rei Inoue and Takao Yamazaki	4．巻 26
2．論文標題 Invariants of Weyl group action and q-characters of quantum affine algebras	5．発行年 2023年
3．雑誌名 Algebras and Representation Theory	6．最初と最後の頁 3167 - 3183
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10468-023-10205-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 Rei Inoue, Atsuo Kuniba and Yuji Terashima	4．巻 57
2．論文標題 Tetrahedron equation and quantum cluster algebras	5．発行年 2024年
3．雑誌名 J. of Phys. A: Math. Theor.	6．最初と最後の頁 33pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1088/1751-8121/ad2224	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計15件（うち招待講演　14件／うち国際学会　9件）

1．発表者名 Rei Inoue
2．発表標題 Cluster algebras and combinatorics in representation theory, Cluster algebra and its development, Cluster algebras and hyperbolic geometry
3．学会等名 Aisenstadt Chair Lecture Series, CRM（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2022年

１．発表者名 Rei Inoue
２．発表標題 ワイル群のクラスター実現と表現論への応用
３．学会等名 日本数学会年会（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 井上　玲
２．発表標題 クラスター代数とその広がり
３．学会等名 第66回　代数学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 Rei Inoue
２．発表標題 Cluster algebras and its applications to rational maps
３．学会等名 The 2022 ANZAMP (The Australian and New Zealand Association of Mathematical Physics) Meeting（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

１．発表者名 井上玲
２．発表標題 クラスター代数と双曲幾何
３．学会等名 第75回　Encounter with Mathematics（招待講演）
４．発表年 2022年

1．発表者名
Rei Inoue

2．発表標題
Cluster realization of Weyl groups and its applications

3．学会等名
2020年度表現論シンポジウム（招待講演）

4．発表年
2020年

1．発表者名
Rei Inoue

2．発表標題
Cluster realizations of Weyl groups and their applications

3．学会等名
Cluster Algebras 2019（京都大学）（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Rei Inoue

2．発表標題
Cluster realizations of Weyl groups and their applications

3．学会等名
Integrable systems, special functions and combinatorics（ICMS, イギリス）（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2019年

1．発表者名
Rei Inoue

2．発表標題
R-matrices in cluster algebras

3．学会等名
Baxter 2020: Frontiers in Integrability（ANU, オーストラリア）（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2020年

１．発表者名 Rei Inoue
２．発表標題 Symmetry of discrete and ultradiscrete integrable systems
３．学会等名 Non-commutative Geometry meets Topological Recursion (ESI, オーストリア)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Rei Inoue
２．発表標題 Cluster realization of Weyl group and its applications to representation theory
３．学会等名 FPSAC '23 (UC Davis, アメリカ)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 井上　玲
２．発表標題 クラスター変異と3次元可積分系
３．学会等名 可積分系数理における最近の展開 (RIMS, 京都大学)（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Rei Inoue
２．発表標題 Cluster realization of Weyl groups and its applications to representation theory
３．学会等名 Workshop on mirror symmetry and related topics (京都大学)（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2023年

１．発表者名 Rei Inoue
２．発表標題 Cluster algebras and 3D integrability
３．学会等名 Advances in Cluster Algebras 2024（名古屋大学）（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2024年

１．発表者名 井上 玲，国場敦夫，寺嶋侑二
２．発表標題 量子クラスター代数と3 次元可積分性
３．学会等名 日本数学会2024年度年会
４．発表年 2024年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Rei Inoue's page https://sites.google.com/site/reiinouesite/Home

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	精華大学			