

令和 6 年 6 月 18 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03441

研究課題名(和文)代数関数体の内部構造の研究 - ガロア点の視点から -

研究課題名(英文)Studies on the internal structure of algebraic function fields - from the viewpoint of Galois point studies

研究代表者

高橋 剛 (Takahashi, Takeshi)

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：60390431

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：吉原久夫氏によって導入された平面代数曲線のガロア点は、射影代数多様体のガロア部分空間などの種々の一般化が提案され着実に研究が進められてきた。深澤知氏と三浦敬氏と私は、平面曲線に対する「準ガロア点」を定義し、それらの個数、分布などを研究した。米田二良氏と加藤正太郎氏と私は、3次元射影空間内の非特異6次曲線の「ガロア直線」の本数と分布を研究し、その最大本数と分布を決定した。池田愛輝氏(新潟大)と私は、射影平面内の可約で被約な代数曲線に対して、「同時ガロア点」を定義した。各既約成分が非特異(楕円曲線を除く)の場合に、同時ガロア点の個数を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

射影平面内の代数曲線についての準ガロア点の個数と分布について多くの成果をあげることができ、結果を整理した論文を投稿することができた。3次元射影空間内の射影代数曲線に対するガロア直線について、その本数や分布を調べる方法を開発した。また、既約平面曲線に限らず、可約な平面曲線に対して、そのガロア点である同時ガロア点を定義し、それを研究する基礎を与えた。つまり、本研究課題において、ガロア点に関する新しい概念をいくつか提供し、それらの基本定理を示すことができた。

研究成果の概要(英文)：The study related to "Galois points for algebraic plane curves", introduced by Hisao Yoshihara (Niigata Univ.) have been investigated steadily, with several generalizations. S. Fukazawa (Yamagata Univ.), K. Miura (Ube National College of Technology) and I defined "quasi-Galois points" for plane curves and studied the groups associated with quasi-Galois points, the number and distribution of quasi-Galois points. J. Komeda (Kanagawa Institute of Technology), S. Kato (Niigata Univ.) and I studied the number and distribution of "Galois lines" for nonsingular curves of degree 6 in 3-dimensional projective space, and determined the maximum numbers and distribution of such lines. A. Ikeda (Niigata Univ.) and I defined "simultaneous Galois points" for reducible and reduced algebraic plane curves. The number of simultaneous Galois points could be determined when each irreducible component of an algebraic curve is a non-singular plane curve not an elliptic curve.

研究分野：代数幾何

キーワード：ガロア点 準ガロア点 ガロア直線 同時ガロア点 代数関数体の内部構造 射影代数多様体の自己同型群

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

代数関数体にどのような部分体が含まれているのかを代数幾何の視点を用いて調べたい。吉原久夫氏(新潟大学名誉教授)は、そのために新しい用語「平面代数曲線のガロア点」を定義した。平面曲線のガロア点の多さは、その平面曲線が射影平面の中でどのくらい対称的であるかを表している。吉原氏や三浦敬氏(宇部工業高等専門学校)らによって、平面曲線のガロア点について基本的な研究が行われた。その後、吉原氏はガロア点を射影空間内の代数超曲面に対しても定義して、非特異超曲面に対してその個数や分布を調べた。深澤知氏(山形大学)と私は、超曲面に正規特異点がある場合に、ガロア点の個数や分布を調べた。吉原氏はさらに、射影空間内の余次元の高い射影多様体についてガロア部分空間を定義し、またその概念を利用し、射影多様体の射影空間への埋め込みに対してガロア埋め込みという用語を定義した。深澤氏、三浦氏と私は平面代数曲線に対して、ガロア点の定義の条件を弱めて一般化した「準ガロア点」を定義し、それに付随するガロア群を調べた。また、米田二良氏(神奈川工科大学名誉教授)と私は、平面内にあるとは限らない、非特異射影代数多様体に対して、ガロア点の概念とガロア・ワイエルシュトラス点の概念を参考にして考えた、「弱ガロア・ワイエルシュトラス点」を定義して、点のワイエルシュトラス半群が2元生成の場合にそれらの個数を調べた。このように平面代数曲線のガロア点とそれに関係する数学的対象がいくつか定義され、豊富な研究成果がもたらされてきた。未解決問題も多く提案されていて、それらは「Open Problems」(深澤氏・吉原氏共著)としてまとめられている。

2. 研究の目的

代数関数体にどのような部分体が含まれているのかを、代数幾何を用いて調べたい。平面代数曲線の関数体を調べるために吉原氏によりガロア点が導入された。より広いクラスの代数関数体をより詳しく調べるためには、ガロア点の概念をどのように一般化すべきだろうか。

本研究の目的は、準ガロア点と弱ガロア・ワイエルシュトラス点の理論を展開して、代数関数体の内部構造を調べる新手法を提供することである。申請者が三浦氏・深澤氏と共に定義した準ガロア点は、吉原氏が定義したガロア点よりも多様に存在する。本研究により、ガロア点理論よりも詳細な結果が得られて、豊富な理論が展開されるはずである。実際、複素数体上の非特異平面5次曲線のガロア点は高々3個であったが、準ガロア点は最多で18個存在することがすでに示されている。また、クライン4次曲線やウィーマン6次曲線にはガロア点は存在しないが、準ガロア点は多数存在している。さらに、これらの代数曲線の自己同型群は準ガロア点に付随する自己同型たちによって生成されるという結果も得られている。また、申請者が米田氏と定義した弱ガロア・ワイエルシュトラス点は一般の代数曲線に対して定義されるものである。吉原氏の定義したガロア点は平面代数曲線に対して定義されているものであった。より広いクラスの代数関数体に対して、ガロア点と同様の手法による考察が可能となる。

本課題の研究結果は次の様な新展開へと繋がり、代数関数体や代数多様体の繊細な性質を扱うのに有効な新手法が得られることが予想される。「準ガロア点による射影超曲面の分類」、「弱ガロア・ワイエルシュトラス点による代数曲線の分類」、「準ガロア点や弱ガロア・ワイエルシュトラス点に付随する自己同型を手がかりとした、代数多様体の自己同型群の研究」、「有限体上の平面代数曲線の有理点と準ガロア点との関係」など。まずはガロア点の研究を模範にして基本定理を整備し、具体例の計算から問題解決のヒントを得て、理論展開を進めたい。

3. 研究の方法

平面代数曲線に対する準ガロア点、代数曲線の弱ガロア・ワイエルシュトラス点、およびそれらの高次元化の研究を行う。具体的には、それらの個数と分布、付随する群を調べる。さらに、得られた結果を射影多様体の分類や自己同型群の研究などに応用する。ガロア点理論の研究者を訪問して共同研究を行う。また、ガロア点理論の研究者達と共同でワークショップを開催して意見交換を行う。

次が本研究の目標である：『射影超曲面に対する準ガロア点について、個数と分布や付随する群などを調べその性質を明らかにすること』、『代数曲線の弱ガロア・ワイエルシュトラス点の個数や分布について基本定理を得ること』。さらに、射影超曲面の分類や代数曲線の自己同型群の研究などにそれらを応用していきたい。

具体的には以下の問題を解決する：(1)平面代数曲線に対する準ガロア点の個数の上限に関する基本的な公式はすでに得られているが、すべての場合に成立するものではない。基本公式の適用条件に合わない場合に、準ガロア点の個数の上限について新しい公式を発見する。さらに

その個数の上限に達する代数曲線を分類する。(2) 平面代数曲線の自己同型群の位数が大きい場合には、準ガロア点が多数存在することが期待される。準ガロア点に付随する自己同型から生成される群は自己同型群の部分群であるが、その間にどれだけの違いがあるのかを明らかにする。また、全く準ガロア点を持たないときに自己同型群の位数はどの程度大きくなれるのかを決定し、そのような代数曲線の分類を行う。(3) 代数曲線の点に対して、ワイエルシュトラス半群というものがある。その半群が 2 つの元で生成される弱ガロア・ワイエルシュトラス点について、個数と分布はすでに決定できている。半群が 2 元生成の場合を参考に、より一般の弱ガロア・ワイエルシュトラス点の分布について調べ、個数の上限を与える公式を求める。また、その個数が上限に達するような代数曲線を分類する。(4) 代数曲線で得られた結果を高次元化する。

研究が計画通りにいかない場合は、次の問題を研究する：(1) 有限体上の平面代数曲線に対して、その有理点と準ガロア点との関係を研究する。また、具体的に定義式が与えられた平面曲線の自己同型群を求めるという問題について、準ガロア点を応用した計算方法を開発する。(2) 平面代数曲線の準ガロア点に付随するガロア群が巡回群となる場合には、ガロア閉包曲線上に弱ガロア・ワイエルシュトラス点が存在することが期待される。そのような準ガロア点から弱ガロア・ワイエルシュトラス点への対応について明らかにする。(3) 平面曲線のガロア点を準ガロア点へと一般化したように、平面曲線とは限らない射影曲線の弱ガロア・ワイエルシュトラス点の概念を一般化して、準・弱ガロア・ワイエルシュトラス点(仮名)を定義して、その基本性質について研究を行う。

本研究課題は、申請者の単独研究により行われる。ワイエルシュトラス点に詳しい米田氏、ガロア点や準ガロア点に詳しい三浦氏と深澤氏などと活発な議論を行いながら研究を進めていく。

4. 研究成果

2019 年度は以下のように研究が進み、概ね順調に研究は進展した。

深澤氏、東根一樹氏(当時：山形大学、現在：都城工業高等専門学校)との共同研究が順調に進展した。平面曲線に対して点射影から与えられる体拡大のガロア閉包について、別の 2 点からの点射影が同じガロア閉包となる条件について定理が得られた。結果をプレプリントとしてまとめることができた。

神奈川工科大学の米田二良氏との弱ガロア・ワイエルシュトラス点に関する共同研究で得られた結果を論文にしたものが、学術雑誌に掲載された。

神奈川工科大学の米田二良氏と、3 次元射影空間内の非特異 6 次曲線のガロア直線に関する共同研究を行い、部分的な結果を得ることができた。

2020 年度は COVID-19 による影響で、国外はおろか県外への出張も全くできなかった。そのため共同研究者との対面による打ち合わせを設定することができず、共同研究者との意思疎通に困難が生じた。対面による研究会も完全中止となり、研究遂行に必要な情報収集も予定通りにはできなかった。さらに、COVID-19 の感染予防対策により、在宅勤務の増加、大学での講義形式のオンライン化など、それらの対応にも時間を取られることになった。以上の理由により、研究課題で進捗は滞ることになった。COVID-19 対応下でも共同研究者と研究打ち合わせができるように、オンラインでの研究打ち合わせの方法を模索し、Zoom を利用したオンライン会議で数学の研究打ち合わせができるように、必要な機材を購入した。このような困難な状況であったが、次のような成果があった。

米田氏と Zoom を用いたオンラインによる研究打ち合わせを行うことができた。そして、3 次元射影空間内の 6 次代数曲線に対して、射の次数が 6 となるガロア直線をたくさん持つのはわかるが、それら全てのガロア直線がどれだけあるのかが不明であった具体例について、ガロア直線の本数を決定することができた。またその具体例の自己同型群も決定することができた。

深澤氏、三浦との Zoom を用いたオンラインによる研究打ち合わせでは、非特異平面代数曲線の準ガロア点の個数の上限について、これまで得られていた結果を改良することができた。

2021 年度も新型コロナウイルス感染症の感染拡大の影響のため、いまだに対面での研究打ち合わせや、対面での研究会の開催ができない状況が続いた。しかし、オンラインによる打ち合わせが円滑に行えるようになった。次のような研究成果を得ることができた。

米田氏との共同研究により、種数 4 の非超楕円の射影的代数曲線の標準埋め込みについて、ガロア群が巡回群となる場合のガロア直線の本数と分布が完全に決定することができた。得られた結果は、2 本の論文にまとめ、学術雑誌に投稿した。

2022 年度も新型コロナウイルス感染症の感染拡大状況やその予防対策の影響のため、対面での研究打ち合わせや、対面での研究会の開催を自粛する状況が続いた。年度の終わりに近づいて、対面での打ち合わせや集會が行えるようになってきた。オンラインでの研究打ち合わせに馴染んできたことや対面での打ち合わせを再開できたことで、円滑に打ち合わせを行えるよう

になった。次の成果があった。

米田氏との共同研究の結果を2本の論文にまとめて学術雑誌に投稿していたが、それらはレフリーによる指示を受けて修正を行い、アクセプトされた。

深澤氏、三浦氏との共同研究により、平面曲線の準ガロア点の個数とその分布について結果を追加し、目標のところまで研究を仕上げる事ができた。

2023年度には新型コロナウイルス感染症の影響は落ち着き研究打ち合わせも通常通りに行えるようになった。次のような成果があった。

深澤氏、三浦氏との共同研究により得られた準ガロア点の個数や分布についての結果が論文として完成して、学術雑誌に投稿した。

米田氏と私とで行ってきた、3次元射影空間内の非特異6次曲線の「ガロア直線」の本数と分布について進展があった。加藤正太郎氏(新潟大学工学部4年生)との共同研究で、巡回群ではないガロア群となるガロア直線の最大本数をコンピュータ計算の利用によって決定できた。

池田愛輝氏(新潟大学博士課程学生)との共同研究で、射影平面内の可約で被約な代数曲線に対して、「同時ガロア点」を定義した。代数曲線の各既約成分が非特異平面曲線の場合(ただし、楕円曲線を除く)に、同時ガロア点の個数を決定することができた。結果を論文にして、学術雑誌にアクセプトされた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Aki Ikeda and Takeshi Takahashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Simultaneous Galois points for a reducible plane curve consisting of nonsingular components	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Aki Ikeda and Takeshi Takahashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Simultaneous Galois points for a reducible plane curve consisting of nonsingular components	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Kodai Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jiryo Komeda and Takeshi Takahashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Galois lines for a canonical curve of genus 4, I: Non-skew cyclic lines	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Jiryo Komeda and Takeshi Takahashi	4. 巻 -
2. 論文標題 Galois lines for a canonical curve of genus 4, II: skew cyclic lines	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Fukasawa Satoru, Higashine Kazuki, Takahashi Takeshi	4. 巻 -
2. 論文標題 Algebraic curves admitting the same Galois closure for two projections	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-022-01191-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Komeda, Jiryo and Takahashi, Takeshi	4. 巻 56(6)
2. 論文標題 Number of weak Galois-Weierstrass points with Weierstrass semigroups generated by two elements	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the Korean Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1463-1474
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4134/JKMS.j180740	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計4件 (うち招待講演 1件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 高橋剛
2. 発表標題 可約平面曲線の同時ガロア点
3. 学会等名 第21回代数曲線論シンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 高橋剛
2. 発表標題 種数4の標準曲線に対する skew cyclic line の本数
3. 学会等名 新潟代数セミナー
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 高橋剛
2. 発表標題 Galois lines for a space curve of genus 4
3. 学会等名 第17回代数曲線論シンポジウム 於神奈川工科大学アクティブラーニング横浜（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 高橋剛
2. 発表標題 種数4曲線のガロアラインについて, その2
3. 学会等名 Workshop on Galois point and related topics, 山形大学理学部
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	米田 二良 (Komeda Jiryo)		
研究協力者	深澤 知 (Fukasawa Satoru)		
研究協力者	三浦 敬 (Miura Kei)		

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	大淵 朗 (Ohbuchi Akira)		
研究協力者	池田 愛輝 (Ikeda Aki)		
研究協力者	加藤 正太郎 (Kato Shotaro)		

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関