

令和 7 年 6 月 2 日現在

機関番号：13901

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2024

課題番号：19K03444

研究課題名（和文）マックイ対応と導来圏

研究課題名（英文）McKay correspondence and derived category

研究代表者

石井 亮（Ishii, Akira）

名古屋大学・多元数理科学研究科・教授

研究者番号：10252420

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：GL(2)の部分群に対するG-constellationを研究した論文，群作用付き両立的ダイマー模型に関する論文が出版された．また，Hirzebruch曲面 \mathbb{P}^2 上のexceptional collectionについて上原氏大川氏と共同研究し，(-2)曲線によるspherical twistとexceptional collectionへの組紐群の作用を除いてexceptional collectionの分類ができたので論文として投稿した．階数3の実鏡映群に対する導来McKay対応について，大学院生の仁村氏と共同研究をし，この場合の半直交分解の存在に関する予想を解決した．

研究成果の学術的意義や社会的意義

Hirzebruch曲面 \mathbb{P}^2 は弱del Pezzo曲面であり，これまで知られていたDel Pezzo曲面の場合とはspherical twistの存在という点で大きく異なっている． \mathbb{P}^2 の場合にDel Pezzo曲面との違いが本質的にspherical twistによってもたらされていることがわかったことが意義深い．また，階数3の実鏡映群に対する導来McKay対応の研究では，極大特異点解消の存在がわかったこと，さらにその具体的構造を調べることにより，半直交分解に関する予想を解決することができたことが成果である．

研究成果の概要（英文）：We published a paper on the moduli of G-constellations for a subgroup G of GL(2) and a paper on consistent dimer models with group actions. We studied exceptional collections on the Hirzebruch surface \mathbb{P}^2 with Okawa and Uehara, and classified exceptional collections up to spherical twists and mutations of exceptional collections. This result is submitted. With a graduate student Nimura, we studied the derived McKay correspondence for real reflection groups of rank 3 and verified a conjecture on the existence of a certain semiorthogonal decomposition.

研究分野：代数幾何学

キーワード：McKay対応 導来圏 exceptional collection 半直交分解

1. 研究開始当初の背景

(1) $GL(2)$ のスモール部分群による商特異点の特異点解消はいろいろあるが、特異点解消が G -constellation のモジュライ空間として記述されるための必要十分条件は、最大特異点解消に支配されることであることを示した論文を投稿中であった。

(2) ダイマー模型を用いることにより、ゴレンシュタイントーリック特異点の非可換クレパント解消が構成されることが知られていた。この拡張について、植田氏、Nolla 氏と共同研究を行っていた。

(3) Del Pezzo 曲面の上の full strong exceptional collection の分類は知られていた。この場合 exceptional object はベクトル束である。また、Hirzebruch 曲面 $\Sigma 2$ 上の exceptional sheaf の分類が上原氏と大川氏によりなされていたが、ベクトル束ではないような exceptional sheaf の分類が鍵であった。

(4) 一般に McKay 対応は、 $GL(n)$ のスモールな部分群に対して考察されてきたが、川又によりスモールとは限らない $GL(2)$ や $GL(3)$ の部分群に対する導来マッカイ対応が確立されていた。特に $GL(3)$ の McKay 対応において極大 Q 分解端末化の概念が有効に使われていた。

2. 研究の目的

まずは、背景における(1)(2)を完成して出版し、さらに(3)の拡張として、Hirzebruch 曲面 $\Sigma 2$ 上の sheaf とは限らない導来圏の対象からなる exceptional collection を分類を目的とする。そして、導来 McKay 対応における(4)のような拡張に応じて生じる新たな問題を考え、解決することを目指していた。

3. 研究の方法

(1) 単独での研究である。査読者とやり取りして論文の完成度を高めた。

(2) 植田氏、Nolla 氏と共同研究であり、連絡を取り合いながら行った。

(3) 上原氏、大川氏との共同研究であり、適宜研究打ち合わせを行った。この研究では、例外対象のコホモロジー層のスキーム論的台が被約であることを示す部分が鍵であり、技術的に複雑な議論を注意深く行った。

(4) まずは階数 3 の実鏡映群について、極大特異点解消の具体的構成を目指した。大学院生の仁村氏との共同研究となった。30 年ほど前に Bertin, Markushevich や Roan により行われていた、回転群による商特異点のクレパント解消の具体的構成における方法を用いた。

4. 研究成果

(1) 2 次元商特異点に対して G 軌道のヒルベルトスキームと呼ばれるモジュライ空間が商特異点の極小特異点解消であること、このモジュライ空間を用いて極小特異点解消の導来圏が商スタックの導来圏に埋め込み得ることが 2002 年の論文でわかっていた。このとき用いた G 軌道のヒルベルトスキームは、特別な安定性条件に対する G -constellation のモジュライ空間である。 $SL(3)$ の有限可換部分群に対して、任意の射影的クレパント解消が適当な安定性条件に対する G -constellation のモジュライ空間として得られることが以前の Craw 氏との共同研究でわかっていた。 $SL(2)$ の部分群に対しては、 G -constellation のモジュライ空間は generic な安定性条件に対しては必ず最小特異点解消になるが、 $GL(2)$ の部分群の場合、 generic な安定性条件に対するモジュライ空間として得られる特異点解消は必ずしも極小であるとは限らない。そこでスモールであるような任意の群 G に対して、そのようにして得られる特異点解消が、極大特異点解消(2次元の場合は最大でもある)と呼ばれる特異点解消で支配されるという条件で特徴付けられることを示した。この結果は、Craw 氏との共同研究の非可換群に対する一般化を予想する根拠となった(なお、その後山岸氏によりこの一般化は証明された)。また、モジュライ空間の導来圏はアフィン平面上の G 同変接続層の導来圏に埋め込むことができるが、DK 仮説によればそのような特異点解消は最大特異点解消に支配されるべきであるが、この特徴づけにおいて、導来圏の埋め込みがモジュライ空間としての記述を用いて与えられることを示したことになる。

(2) 両立的ダイマー模型から、ゴレンシュタインアフィントーリック多様体の非可換クレパント解消が構成できることがわかっていた。群作用つきの両立的ダイマー模型を考えることにより、ゴレンシュタインアフィントーリック多様体のゴレンシュタイン商に対して非可換クレパント解消が構成できることを示した。さらに、この研究においては、それが任意の格子多角形とそれに対する有限群作用(格子点を固定するもの)に対して可能であることを示した。この

研究の意義は、トーリックでも商特異点でもないような特異点に対して非可換クレパント解消を構成したというところにある。

(3) Hirzebruch 曲面 $\Sigma 2$ 上の exceptional collection について上原北斗氏および大川新之助氏との共同研究により成果が得られた。Del Pezzo 曲面上の exceptional collection については、その構造が知られている。Del Pezzo 曲面上の場合は、exceptional collection としては、本質的には連接層からなるものを考えればよかったが、結果を弱 Del Pezzo 曲面に拡張しようとする、一つの層では表されない複体を考える必要がある。本研究では、弱 Del Pezzo 曲面の典型例である Hirzebruch 曲面 $\Sigma 2$ の場合に研究を行なった。この研究では、spherical twist と呼ばれる (-2) 曲線のまわりで捻るような自己圏同値が重要な役割を果たす。まず、例外対象の各コホモロジー層が (-2) 曲線の近傍でどのような条件を満たすかということ調べた。非常に技術的な部分であるが、この部分がこの研究の鍵である。その結果を用いると spherical twist を繰り返し適用することにより例外対象がベクトル束に変換できることを示すことができた。そしてこの手法を拡張すると、導来圏の exceptional object が spherical twist の合成で Grothendieck 群でのクラスを保ったままベクトル束に変換できることがわかった。さらに射影直線の積への変形を用いることにより、任意の exceptional collection が full exceptional collection に拡張できること、長さ 4 の例外列の集合に組紐群が推移的に作用すること、などを証明することができた。

この研究は、一般の弱 Del Pezzo 曲面上の exceptional collection の研究の大きな足掛かりになるものである。上述のように、弱 Del Pezzo 曲面の場合には del Pezzo 曲面の場合に比べてはるかに多くの exceptional object が存在するのであるが、余分なものは本質的に (-2) 曲線による spherical twist の合成で生じるものに限定されている、と予想される。 $\Sigma 2$ の場合はそれが正しいことを示し、さらに exceptional collection が変異によってうつりあうという重要な性質までも示すことができたのである。

(4) 階数 3 の実鏡映群に対する導来 McKay 対応について大学院生の仁村氏と共同で考察した。SL(2)や SL(3)の有限部分群に対する導来 McKay 対応は、アフィン空間上の G 同変連接層の導来圏と G による商特異点のクレパント解消の間の導来同値として確立されている。この McKay 対応の一般化としては様々な方向が考えられるが、鏡映群のように作用が余次元 1 で自由でない群作用に対しては、単なる商多様体の代わりに商多様体と因子の組を考えることによって McKay 対応を定式化することができる。G による商の分岐の情報を付加するのである。川又は、GL(3)の有限部分群に対して、商多様体と因子の組の極大 Q 分解端末化と呼ばれるものに付随するスタックと G 同変連接層の導来圏を関係づける半直交分解として導来 McKay 対応を定式化した。

我々の研究では、G は階数 3 の実鏡映群の場合に、極大特異点解消（非特異である極大 Q 分解端末化）を構成することに成功し、さらに極大特異点解消とその上への因子の狭義変換の組から定まる Deligne-Mumford スタックの導来圏と G 同変導来圏の間に圏同値が成立することを示した（導来マッカーイ対応）。極大 Q 分解端末化は必ず存在するのに対して、極大特異点解消の存在は自明ではない。極大特異点解消の存在が示されたこと、そしてそれを用いて導来同値としての導来マッカーイ対応が記述できること、これらの点で一般の場合に比べて強い主張になっている。さらに最大特異点解消に対する極小モデルプログラムを記述することにより、G 同変連接層の導来圏に各成分がアフィン空間の導来圏であるような半直交分解を構成し、このことにより階数 3 の実鏡映群に対する Polishchuk-Van den Bergh の予想を解決した。なお、Polishchuk-Van den Bergh の予想は、ある条件をみたす複素鏡映群の作用についての同変導来圏が、群の共役類に添字づけられた半直交分解を持つ、という予想で、ワイル群などの場合には Polishchuk-Van den Bergh 自身により解決済みである。その条件を満たしながら予想が未解決の場合として挙げられていたのが、階数 2 の複素鏡映群、階数 3 の実鏡映群、コクセター群 H4 である。この研究では階数 2 の複素鏡映群の場合は川又の結果から従うことも説明しているので、残っていた場合の多くがこれで解決したことになる。

G と SL(3)の共通部分である回転群を H としたとき、G による商の極大特異点解消の二重被覆をとったものは、H による商のクレパント解消になっている。これらのクレパント解消は H-Hilbert scheme とは異なっており、クレパント解消の研究に Hilbert scheme が導入される以前の 90 年代に手で構成されたクレパント解消になっている点も興味深い。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ishii Akira, Nolla Alvaro, Ueda Kazushi	4. 巻 306
2. 論文標題 Dimer models and group actions	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-023-03394-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ishii Akira	4. 巻 50
2. 論文標題 G-constellations and the maximal resolution of a quotient surface singularity	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 375-398
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.32917/hmj/1607396494	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Akira Ishii and Iku Nakamura	4. 巻 70
2. 論文標題 Extended McKay correspondence for quotient surface singularities	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Q. J. Math.	6. 最初と最後の頁 395-408
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/qmath/hay047	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 7件/うち国際学会 5件）

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 On the McKay correspondence for some reflection groups
3. 学会等名 Workshop on Tropical Geometry, Singularity theory, and Algebraic Geometry（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 On the McKay correspondence for some reflection groups
3. 学会等名 Japanese European symposium on symplectic varieties and moduli spaces, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 On the McKay correspondence for some reflection groups in dimension three
3. 学会等名 Perspectives in Tilting Theory and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2025年

1. 発表者名 石井亮
2. 発表標題 鏡映群の McKay 対応について
3. 学会等名 非可換代数幾何学の大域的問題とその周辺
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 石井亮
2. 発表標題 McKay correspondence for some finite reflection groups
3. 学会等名 Kinosaki Algebraic Geometry Symposium 2023 (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 石井亮
2. 発表標題 Exceptional collections on 2
3. 学会等名 名古屋代数幾何学セミナー
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 Dimer models with group actions
3. 学会等名 Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces - Fourth Edition (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 Exceptional collections on the Hirzebruch surface 2
3. 学会等名 ategorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry VII (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Akira Ishii
2. 発表標題 Exceptional collections on the Hirzebruch surface 2
3. 学会等名 非可換代数幾何学の大域的問題とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会	開催年
McKay correspondence, Tilting theory and related topics	2023年～2023年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
スペイン	Universidad Autonoma de Madrid (UAM)			