

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：23903

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03451

研究課題名（和文）有限群の表現とAuslander-Reiten有向グラフ

研究課題名（英文）Representations of finite groups and Auslander-Reiten quivers

研究代表者

河田 成人（KAWATA, Shigeto）

名古屋市立大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：50195103

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：有限群 $G$ の完備離散付値環上の群環の整数表現におけるAuslander-Reiten有向グラフを研究した。特に、 $G$ の $p$ -部分群 $Q$ をヴァーテックスに持つScott加群 $S$ のAuslander-Reiten連結成分に属する直既約加群のヴァーテックスは $Q$ または $Q$ の正規化群のSylow部分群であることを示した。また、 $S$ の概分裂短完全列に直既約加群 $L$ をテンサーした短完全列が概分裂となるのは、 $L$ がvirtually irreducibleであるときに限ることを示した。さらに、 $L$ がvirtually irreducibleである必要十分条件は、 $L$ と $L$ の双対加群のテンサー積に $S$ が重複度1で現れることを証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限群を基底とした線形空間に、群として本来持つ乗法を反映させて構成される群多元環は、群の構造を研究するために役立つとともに、対称多元環としてとても重要な多元環である。本研究では、多元環の表現論で駆使されているAuslander-Reiten理論を利用することによって、有限群の整数表現において重要な役割を果たすScott表現加群やvirtually irreducible表現加群についてテンサー積と関連させた興味深い結果を得た。このことは、有限群の表現においてAuslander-Reiten理論の新たな活用方法を見出すことが期待できる。

研究成果の概要（英文）：Let  $G$  be a finite group and  $R$  a complete discrete valuation ring. We study the Auslander-Reiten quiver of the group ring  $RG$ . In particular, we show that the vertices of indecomposable  $RG$ -lattices in the Auslander-Reiten component containing the Scott lattice with a  $p$ -subgroup  $Q$  of  $G$  as vertex is  $Q$  or a Sylow  $p$ -subgroup of the normalizer of  $Q$ . Also, we show that the tensor sequence of the almost split sequence of  $S$  with an indecomposable  $RG$ -lattice  $L$  is almost split if and only if  $L$  is virtually irreducible. Moreover, we show that  $L$  is virtually irreducible if and only if  $S$  appears with multiplicity 1 as a direct summand in the tensor product of  $L$  and its dual lattice.

研究分野：有限群の表現論

キーワード：有限群 表現論 Auslander-Reiten有向グラフ

### 1. 研究開始当初の背景

有限群の表現論を研究するにあたって、正標数の体上の表現（以下でモジュラー表現と呼ぶ）と標数 0 の体上の通常表現を並行して考察することは大変有効である。通常表現は半単純環の古典的理論のおかげで十分に研究されており、有限群の構造を解明するためにも応用されてきた。一方で正標数の体上の群多元環は半単純ではないが、ブロックイデアルへの分解に対応させて、モジュラー表現加群のクラスを分割することができる。この分割に応じて通常表現における既約表現のクラスも細分化することができ、より精密な理論が構成されてきた。これらのモジュラー表現と通常表現を整合的に結び付けるものとして完備離散付値環上の表現（以下では整数表現と呼ぶ）が重要な役割を果たしている。

また近年、アルティン環や整環（すなわち完備離散付置環上の多元環）の表現論において Auslander-Reiten の理論が駆使されて興味深い研究成果が得られている。そのため、この理論の有限群の表現への応用を図り、さらなる有効性を探ることが期待される。Auslander-Reiten 理論においては、Auslander-Reiten 有向グラフ（以下では AR クイバーと呼び、その連結成分を AR 連結成分と書く）と呼ばれるグラフが研究の主な対象となる。AR クイバーとは、直既約加群の同型類をグラフの点とし、既約写像を矢とみなして得られる向き付けられたグラフのことであり、直既約加群のなすカテゴリーに秩序を付けた枠組みを与えたものと考えられる。一般の整環では任意の直既約表現加群に対して概分裂列や AR クイバーを考えられないこともあるが、群整環は係数環を完備離散付値環の商体で係数拡大すると半単純環となることから、群整環に対しては常に AR クイバーを考えられる。この特性を大いに活かして AR クイバーを利用すれば、群整環上の直既約加群の様々な興味深いクラスの全体像を見渡して考察することが期待できる。

ところで、群多元環は多くの場合に野性的な無限表現型であり、表現加群のすべてをパラメタライズして分類することは不可能であることが知られている。それにもかかわらず、有限群のモジュラー表現の場合に K. Erdmann が AR クイバーの形状を決定した。すなわち、正標数の体上の群多元環が野性的と呼ばれる無限表現型であれば、AR 連結成分の形状はいわゆる A 無限型（半平面状に広がる格子型か、もしくは半無限に伸びる筒状の格子型）であることを示した。その一方で、有限群の整数表現の AR クイバーについてほとんど知られていない。特に無限表現型の場合に、AR 連結成分の形状がどのようなものかという自然な問題を解明する必要がある。

### 2. 研究の目的

上述した Erdmann の重要な結果を踏まえて、無限表現型の多元環の重要なクラスの一つである群環のモジュラー表現と整数表現を、Auslander-Reiten 理論を通して総合的に研究することを本研究の目標とする。整数表現における AR クイバーの形状について現時点では、有限表現型の場合には調べられているが、一般の無限表現型の場合には限られた例しか知られていない。そこで、モジュラー表現での結果をもとにして、有限群の整数表現における AR クイバーの形状の決定を目指すために、次を第 1 の目的に掲げる。

(1) 「virtually irreducible と呼ばれる表現加群を含む AR 連結成分の形状を追求する。そのために、virtually irreducible 表現加群の性質や特徴づけについても考察し、さらに概分裂短完全列に関する状況についても追求する。」

有限群の整数表現において、virtually irreducible 表現加群とは、その自己準同型環が簡単な構造を持つ表現加群である。既約な表現加群の自己準同型環が完備離散付値環そのものであることを思い起こせば、virtually irreducible 表現加群は既約な整数表現加群の自然な拡張と見なせる重要な加群であり、AR クイバーの研究の端緒としてふさわしいものである。

もともと有限群の表現論においては、群とその部分群、特に素数冪位数の部分群や局所部分群に着目して、表現加群の誘導と制限の関連を研究対象とすることが多いが、ここにも AR クイバーを利用したい。そのために次を第 2 の目的とする。

(2) 「有限群の AR 連結成分を構成する直既約加群のヴァーテクスを調べる。」

群環上の直既約表現加群  $M$  に対して、 $M$  が有限群の部分群  $Q$  の表現加群からの誘導加群の直和因子として現れるとき、 $M$  は  $Q$ -射影的であるという。 $M$  が  $Q$ -射影的であるような部分群  $Q$  で位数が最小となるものが共役の意味で一意的に定まるが、その最小の部分群  $Q$  を  $M$  のヴァーテクスと呼ぶ。群環上の直既約加群のヴァーテクスは、その直既約表現加群の特性に大きな影響を与える部分群であり、有限群の表現論において制限と誘導を考察する際の基本的な概念である。一つ一つの表現加群の制限・誘導を個別に調べるだけでなく、AR 連結成分全体にまつわる部分群に関する制限・誘導を検討することで、新たな知見を得たい。

### 3. 研究の方法

研究目的 (1) のために、まず高さが 0 の整数表現加群の AR 連結成分に注目する。高さが 0 の表現加群は各ブロックに必ず存在し、そのブロックを特徴付ける重要な virtually irreducible 表現加群である。さらに、その自己準同型環の構造から高さが 0 の表現加群の概分裂列は計算しやすいため、AR 連結成分の研究の足掛かりになると期待される。

研究目的 (2) の AR 連結成分の直既約加群のヴァーテクスに関して、モジュラー表現の場

合には多くの結果が得られているが、整数表現の場合には少数の例しか調べられていない。モジュラー表現での研究手法を参考にしながら、整数表現における AR 連結成分のヴァーテックスの様子について研究し、その結果を AR 連結成分の形状の決定に役立たせる。自明なソースを持つ表現加群の AR 連結成分に属する直既約加群のヴァーテックスを詳しく調べることが一般の AR 連結成分の場合の解明につながると思われる。特に、Scott 表現加群が計算しやすいので、この AR 連結成分のヴァーテックスの決定を目指す。ここで Scott 加群とは、ある置換加群の直規約因子であって、その head と socle が自明な表現加群となっているものである。

なお、群環は代表的な対称多元環であり、多元環のなかでも重要なクラスである。そして群多元環の一般化として自己入射的多元環や Frobenius 環、準 Frobenius 環などの広がりがある。源泉としての群多元環を常に念頭におきつつ、一般化された様々なクラスの環を総合的に考察すれば、多元環やアルティン環の研究の新たな展開にも貢献できる。環論全体の研究の発展のために、毎年「環論および表現論シンポジウム」が開催されており、また他にも代数学関連の研究集会が予定されている。これらのシンポジウムの運営に協力して多くの研究者と交流を図り、広い視野に立って研究を推進する。

#### 4. 研究成果

$G$  で有限群を表し、 $p$  は有限群  $G$  の位数を割り切る素数とする。完備離散付値環  $R$  の極大イデアルは  $\pi$  で生成され、その剰余体  $k = R/\pi R$  は標数が  $p$  であるとする。 $RG$  および  $kG$  で、係数環  $R$  および  $k$  上の群多元環を表すものとする。Scott 表現加群  $S$  を含む AR 連結成分  $\Theta$  は半平面的に無限に広がる格子型の形状をしており、 $S$  は  $\Theta$  の端点に位置していることが知られていた。この  $\Theta$  について考察を進め、特に、 $\Theta$  を構成する直既約  $RG$ -表現加群  $L$  が  $\Theta$  の端点に位置しなければ、 $L$  のヴァーテックスは  $Q$  の  $G$  における正規化群の Sylow  $p$ -部分群であることを示した。さらに、 $kG$ -加群  $L/\pi L$  の直規約分解において、全ての直規約因子は  $Q$ -射影的であり、その中の少なくとも一つの直規約因子のヴァーテックスは  $Q$  であることも確かめることができた。また、Scott  $RG$ -加群  $S$  で終わる  $RG$ -表現加群の概分裂短完全列と Scott  $kG$ -加群  $S/\pi S$  で終わる  $kG$ -表現加群の概分裂短完全列について並行して調べ、それらの構造や性質および類似性などについて研究した。

有限群の表現論において、表現加群をテンサーしたときの状況を調べることは興味深い問題である。テンサー積にまつわる問題に対して Auslander-Reiten 理論を応用するために、有限群の整数表現（完備離散付値環上の表現）のカテゴリリーにおいて、Scott 加群の概分裂短完全列とテンサー積について研究を進めた。なお、自明な加群は Scott 加群の特別な例である。Auslander と Carlson は、自明な表現加群の概分裂短完全列にトレース分裂加群をテンサーするとトレース分裂加群の概分裂短完全列が構成できるという興味深い定理を示した。一般に、概分裂短完全列は直既約加群の概射影的自己準同型写像から構成される。自明な加群の場合では概射影的自己準同型写像が定数倍写像であるという事実から Auslander-Carlson の定理が導かれる。次の段階として、 $p$ -部分群  $Q$  をヴァーテックスに持つ Scott 加群  $S$  の概分裂短完全列を構成するために Scott 加群の概射影的自己準同型写像について考察を進めた。まず、Green 対応を利用することで、対象とする有限群を局所部分群（ $Q$  の  $G$  における正規化群）に帰着させることが可能であることを確認した。次に局所部分群において Scott 加群の概射影的自己準同型写像を調べて、その写像を  $Q$  に制限すると自明な表現加群の概射影的自己準同型写像であることが分かった。すなわち、Scott 加群  $S$  を  $Q$  に制限すると、自明な表現加群の概分裂短完全列となることを確かめた。このことから、Scott 表現加群の概分裂短完全列に、 $Q$ -ソースがトレース分裂加群であるような直規約表現加群をテンサーしても分裂しないことが分かった。

直既約  $kG$ -加群  $M$  が  $Q$ -射影的であれば、 $Q$  をヴァーテックスに持つ Scott 表現加群  $S$  と  $M$  のテンサー積の直規約因子として  $M$  が現れることが知られている。そこで、 $S$  の概分裂短完全列  $A$  に  $M$  をテンサーして得られる短完全列  $B$  はどのような短完全列となるかを考察し、局所部分群の場合に  $A$  の構造を詳しく調べることができた。その結果を反映させることにより、多くの場合は分裂した短完全列となってしまうが、 $M$  の  $Q$ -ソースがトレース分裂加群であるときには、 $B$  は  $\tau M$  から始まり  $M$  で終わる短完全列と分裂短完全列との直和となることが分かった。ここで  $\tau$  は Auslander-Reiten 移動と呼ばれる作用である。さらに、有限群  $G$  の整数表現(完備離散付値環上の表現)においても研究を進めて、 $Q$  をヴァーテックスに持つ Scott 表現加群の概分裂短完全列に  $Q$ -射影的な表現加群  $L$  をテンサーして得られる短完全列は、 $\Omega L$ （ここで  $\Omega$  は Heller 作用素）から始まり  $L$  で終わる短完全列と分裂短完全列との直和となることを確かめられた。

本研究では、Scott 加群  $S$  を含む Auslander-Reiten 有向グラフの連結成分に属する直既約  $RG$ -表現加群の性質や、 $S$  の概分裂短完全列  $A$  に直既約  $RG$ -表現加群  $L$  をテンサーすることで得られる短完全列  $B$  の性質について考察を続けてきた。特に、 $L$  が virtually irreducible である場合に限り、 $B$  が  $L$  の概分裂短完全列になることが解明できた。さらに、直既約  $RG$ -表現加群  $L$  とその双対加群の直規約分解において  $Q$  をヴァーテックスとして持つ Scott 加群  $S$  が重複度 1 で現れることと、短完全列  $B$  が  $L$  の概分裂短完全列となることが同値であることを示すことができた。その結果として、 $Q$  をヴァーテックスとして持つ直既約  $RG$ -表現加群  $L$  が virtually irreducible であることと、 $L$  とその双対表現加群のテンサー積において  $Q$  をヴァーテックスに持つ Scott 加群  $S$  が重複度 1 で現れることが同値であるという、興味深い結果を得ることができた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 河田成人	4. 巻 2252
2. 論文標題 Knorr格子とテンサー積について	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 15-26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Shigeto Kawata	4. 巻 599
2. 論文標題 On tensor products and almost split sequences for Scott lattices over group rings	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Algebra	6. 最初と最後の頁 122 ~ 132
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jalgebra.2022.02.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shigeto Kawata	4. 巻 48
2. 論文標題 On relative projectivity of lattices in Auslander-Reiten components for group rings	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Communications in Algebra	6. 最初と最後の頁 2461-2466
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/00927872.2020.1715994	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 河田成人	4. 巻 2134
2. 論文標題 Scott加群の概分裂完全列とテンサー積について	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 45-51
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件）

1. 発表者名 河田成人
2. 発表標題 Knorr格子とテンサー積について
3. 学会等名 京都大学数理解析研究所共同研究「有限群のコホモロジー論とその周辺」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河田成人
2. 発表標題 群環上の Scott 加群とテンサー積について
3. 学会等名 2021年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 河田成人
2. 発表標題 群環の概分裂完全列とテンサー積について
3. 学会等名 2019年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------