様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １２ 日現在

機関番号：３４４１９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４５７

研究課題名（和文）有限群の表現の圏論的研究

研究課題名（英文）Categorical study for representations of finite groups

研究代表者
小田　文仁（Oda, Fumihito）

近畿大学・理工学部・教授

研究者番号：００３３２００７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円

研究成果の概要（和文）：与えられた有限群 G とG-束　L から定まる束バーンサイド環 B(G,L) の構造を、抽象バーンサイド環の基本定理を応用して究明した結果を Lattice Burnside rings (Algebra universalis 81 (4) 2020年11月、小田、竹ヶ原、吉田共著）で出版した。B(G,L) の単元群、原始べき等元、スペクトルを決定した。斜バーンサイド環の原始べき等元とコホモロジカルマッキー2モチーフとの関係を Cohomological Mackey 2-motives（小田文仁、RIMS 講究録 2253, pp. 47-55, 2023年5月）で報告した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
一般の有限群 G に対して、その表現を研究することは現代においてもそれほど容易なことではないことが知られている。一方、その成立からまだ100年も経過していない圏論は、高次元化等、めざましい発展を遂げている。Gから定まる様々な圏から自然に得られるさまざまな代数は、現代数学においてその役割の真価を評価することは困難が伴う問題であるが、本研究成果である単元群、原始べき等元、スペクトル等は、学術的な価値として普遍的に重要であることは、現代数学研究者の間ではよく知られていることである。

研究成果の概要（英文）：The structure of a lattice Burnside ring B(G,L) determined from the given finite group G and G-lattice L was investigated by applying the fundamental theorem of generalized Burnside ring, and the results were published as "Lattice Burnside rings"　(Algebra universalis 81 (4) 2020, Oda-Takegahara-Yoshida)．　We determined the unit groups, the primitive　idempotents, and prime spectrum of B(G,L) in the paper. I reported the relationship between the primitive idempotents of a crossed Burnside ring and the cohomological Mackey 2-motives in "Cohomological Mackey 2-motives" (RIMS Kokyuroku, No.2253, pp. 47-55, May, 2023).

研究分野：有限群の表現論

キーワード：マッキー２関手　マッキー２モチーフ　バーンサイド環　斜バーンサイド環　有限群　マッキー関手　グリーン関手　丹原関手

１．研究開始当初の背景

有限群の表現論研究において、主に様々な誘導定理の枠組みに関する問題を圏論的に取り扱う道具としてグリーン氏やドレス氏により有限 G 集合の圏からアーベル群の圏への関手としてマッキー関手の概念が導入された。もっとも基本的な例を与えるものが、バーンサイド環を対応させるバーンサイド関手である。有限群 G のバーンサイド関手は、G のすべてのマッキー関手のなす圏のテンソル積に関する単位的対象となっている。上記設定で「有限 G 集合の圏」を別の G 作用をともなう圏 C に取り替えることで、G の C に関するマッキー関手や G の C に関するバーンサイド環、G の C に関するバーンサイド関手等が自然に構成できることが知られていた。研究代表者は、共同研究者等とともに、C として G モノイド上の斜 G 集合の圏、G 束の圏、有限 G 集合の部分圏等に対して、G の C に関するバーンサイド環を構成し、それらの構造を明らかにするという手法でさまざまな研究を行ってきた。有限群のモジュラー表現論における古典的な問題であるアルペリンの重み予想が G に関して真であることと、ある条件を満たす G のマッキー関手の存在性が同値であることが、テヴエナ氏とウエッブ氏により示されている。また、ファイト-トンプソンの定理と奇数位数の群のバーンサイド環の単元群の位数が 2 であるという命題がトム-ディエック氏により示されている。研究代表者はこれら二つのマッキー関手とバーンサイド環に関わる有限群の問題に深い感銘を受け研究を続けてきた。さまざまな C を構成することで上記問題解決への足がかりが得られることを期待しつつ、この分野を牽引している研究者であるブック氏をはじめとしてさまざまな試みがなされてきた。

C として有限モノイド上の斜 G 集合の圏としたときの G の C に関するバーンサイド環は吉田氏により斜バーンサイド環として導入された。吉田氏と研究代表者が 2001 年に斜バーンサイド環の基本定理や原始べき等元公式を与えた。本研究を開始する直前にバルマー氏とデランブロジオ氏は、マッキー2 関手とマッキー2 モチーフという題目の論文を arXive で公表した。2020 年にヨーロッパ数学会から EMS monographs in mathematics の第 10 巻として出版されることになるその論文の主目的は、彼らが導入したある種のマッキー2 関手の自己同型環が、斜バーンサイド環と同型になり、マッキー2 関手の分解を制御するマッキー2 モチーフの根本が斜バーンサイド環の原始べき等元分解であることを主張するというものであった。

２．研究の目的

与えられた有限群 G と G 作用を持つ束およびその部分束たちから構成される束バーンサイド環の定義を与え、そのべき等元公式を証明する。束バーンサイド環の素スペクトルの連結成分を決定する。ブック氏が導入したセクションバーンサイド環、スライスバーンサイド環と束バーンサイド環との関係を明らかにする。

斜バーンサイド環の原始べき等元の挙動とマッキー２モチーフの挙動の関連を究明すること。

３．研究の方法

ジャコブソン氏や中岡氏により研究されたモノイド関手 M を用いて M バーンサイド環を構成する。G 作用を伴う束に対応するモノイドが与えるモノイド関手 M を用いて構成される M バーンサイド環を束バーンサイド環と呼ぶ。基本定理を証明し応用として原始べき等元公式を証明する。束バーンサイド環が抽象バーンサイド環と同型であることを証明し、応用として単元判定条件を与える。ドレス氏が与えた可解群特徴付けの拡張として、ある条件を満たす束バーンサイド環を用いた可解群特徴付け定理を与える。部分束バーンサイド環とブック氏が導入したセクションバーンサイド環が同型であることを示す。

バーンサイド環の斜バーンサイド環への自然な埋め込みにより、バーンサイド環の原始べき等元が斜バーンサイド環の中で分解される挙動を記述する。

４．研究成果

束バーンサイド環の定義を与え、その基本定理を証明し、原始べき等元公式を証明することができた。束バーンサイド環の素スペクトルの連結成分を決定した。ドレス氏が与えた可解群特徴付けの拡張として、ある条件を満たす束バーンサイド環を用いた可解群特徴付け定理を与えることができた。ブック氏が導入したセクションバーンサイド環と部分束バーンサイド環が同型であることの証明を得た。

有限群 G の有理整数環上のバーンサイド環 B(G) の G の斜バーンサイド環 Bc(G) への自然な埋め込み ι が存在することは 2001 年に指摘されていた。2001 年当時は、B(G) の原始的べき等元の ι による像は Bc(G) のなかで一般には原始的とは限らない、すなわち、Bc(G) 内の 2 個以上の原始的べき等元の和に分解すると考えられていた。しかし、今回の研究の一環でバーンサイド環 B(G) の原始べき等元の ι による像は、斜バーンサイド環 Bc(G) 内でも原始的であるという事実を証明できた。この定理により、有理整数環上のマッキー2 モチーフの分解

$$G\sim(G,e1) \oplus \cdot\cdot\cdot \oplus (G,en)$$

は、B(G) の ι による像のみを考えれば十分であるという事実が得られる。斜バーンサイド環 Bc(G) の原始べき等元たち e1, … ,en は、バーンサイド環 B(G) の原始的べき等元たちと同一視できるということである。上記マッキー2 モチーフ分解は、任意のマッキー２関手 M による G の像として、加法圏の分解

M(G)~M(G,e1) ⊕ ・・・⊕ M(G,en) ・・・ ★

を誘導することは、バルマー氏とデランブロジオ氏のマッキー2 関手とマッキー２モチーフ理論の最大の帰結である。ここで、我々が得た定理の結果が影響を及ぼす、マッキー２関手 M の適用範囲の広さを強調するために、いくつかの加法圏分解の例を示すこととする。

k で任意の可換環を表すこととする。

(1) M(G) として G の k-線形表現の圏 Mod(kG) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

(2) M(G) として G のある条件を満たす k-加群鎖複体の圏 ch(G) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

(3) M(G) として G の k 上安定加群圏 Stab(kG) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

(4) M(G) として G の k 上安定加群圏 Stab(kG) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

(5) M(G) として純正 G 同変スペクトラムの安定ホモトピー圏 SH(G) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

(6) M(G) として G 同変カスパロフ圏 KK(G) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

(7) M(G) として G の k-線形置換表現の圏 Perm(G;k) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

(8) M(G) として G の k 上の p 置換加群の圏 Perm(G;k) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。ここで、k は正標数の体とする。

(9) M(G) として G の マッキー関手の圏 Mack(G;k) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

(10) M(G) として G の コホモロジカルマッキー関手の圏 Mack_coh(G;k) とすると、M はマッキー２関手となり、マッキー2 モチーフ分解より加法圏 M(G) の分解 ★ が得られる。

代表的な例を挙げた。これらの圏の様相は、基礎環 k を取り替えることにより、様々に変化する。k として有理整数環を考えた場合には、上記すべての加法圏分解に関する問題は、バーンサイド環 B(G) の原始的べき等元のみを考慮すれば十分であり、斜バーンサイド環 Bc(G) 内での分解を考慮する必要がないということが、共同研究者および研究代表者の得た定理から得られる大きな一つの帰結ということである。有理整数環上のマッキー2 関手の分解は、バーンサイド環の原始べき等元のみで制御できること、マッキー2 モチーフも制御できることがわかった。本研究遂行中にバルマー氏とデランブロジオ氏は、コホモロジカルマッキー２関手とコホモロジカルマッキー２モチーフという概念を新たに導入した。ある条件をみたすマッキー2 関手の自己同型環が斜バーンサイド環と同型であったが、同様のコホモロジカル版は群環の中心であることを彼らは導いた。研究代表者は彼らがこの結果を述べた論文で与えたマッキー２関手の自己同型環からコホモロジカルマッキー２関手の自己同型環への環準同型写像が、斜バーンサイド環から群環の中心への典型的な環準同型写像である可能性が高いことに気がついた。この気づきはさまざまな可換環上の斜バーンサイド環の原始べき等元のその環準同型写像による群環の中心内の像としての挙動、すなわち、0 になるか否かを判定するための条件を与えるという問題を誘導した。その問題を有理整数環、標数 0 の十分大きな体、正標数の十分大きな体の場合に解決し、Crossed Burnside rings and Mackey 2-motives という題目で arXive に公表した (arXiv:2201.04744)。その論文は現在投稿準備中である。バルマー氏とデランブロジオ氏は、そのプレプリントを Cohomological Mackey 2-functors (Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu , Volume 23 , Issue 1 , January 2024 , pp. 279 – 309)で、デランブロジオ氏は、An introduction to Mackey and Green 2-functors (arXiv:2305.01371)でそれぞれ引用している。

有限群の斜バーンサイド環と群環の中心という、有限群の表現論ではすでに古典的な対象として考えられつつあったものが、バルマー氏とデランブロジオ氏によるマッキー２関手マッキー2 モチーフ理論によりあらたな視点から見直され、さまざまな可換環、とりわけ、正標数の体上で研究することは将来的にとても有望なテーマであると考えている。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計3件（うち査読付論文　2件／うち国際共著　2件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 小田文仁	４．巻 2189
２．論文標題 Mackey 2-functors, Mackey 2-motives, and crossed Burnside rings	５．発行年 2021年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 71-76
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Oda Fumihito、Takegahara Yugen、Yoshida Tomoyuki	４．巻 81
２．論文標題 Lattice Burnside rings	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Algebra universalis	６．最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00012-020-00687-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

１．著者名 ODA Fumihito、WAKATAKE Masahiro	４．巻 48
２．論文標題 The unit group of a partial Burnside ring of a reducible Coxeter group of type A	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Hokkaido Mathematical Journal	６．最初と最後の頁 345～356
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14492/hokmj/1562810514	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕　計5件（うち招待講演　2件／うち国際学会　2件）

１．発表者名 Fumihito Oda
２．発表標題 Crossed Burnside rings and cohomological Mackey 2-motives
３．学会等名 RIMS joint research "Research on finite groups, algebraic combinatorics, and vertex algebras"（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2022年

1．発表者名 小田文仁
2．発表標題 斜バーンサイド環から群代数の中心への準同型
3．学会等名 RIMS共同研究「有限群のコホモロジー論とその周辺」
4．発表年 2022年

1．発表者名 小田文仁、竹ヶ原裕元
2．発表標題 Crossed Burnside rings and cohomological Mackey 2-motives
3．学会等名 2022日本数学会年会
4．発表年 2022年

1．発表者名 小田文仁
2．発表標題 マッキー 2 関手、マッキー 2 モチーフ、斜バーンサイド環
3．学会等名 RIMS 共同研究(公開型) 有限群論, 代数的組合せ論, 頂点代数の研究（招待講演）（国際学会）
4．発表年 2020年

1．発表者名 小田文仁
2．発表標題 斜バーンサイド環とマッキー２関手
3．学会等名 2020日本数学会年会
4．発表年 2020年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

＿

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関