

令和 6 年 6 月 21 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03458

研究課題名(和文)幾何学的特異点論の発展と応用

研究課題名(英文) Developments and Applications of Geometric Singularity Theory

研究代表者

石川 剛郎 (Ishikawa, Goo)

北海道大学・理学研究院・名誉教授

研究者番号：50176161

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：幾何学的特異点の研究を発展・応用させ、接可展面の平行曲面の特異点を分類することに成功した。また(3,5)型および(4,7)型接分布の特異曲線について研究し出版予定である。また研究期間全体を通じて、国際共同研究を行い、シンプレクティック特異点の概説論文を出版した。さらに、特異写像の零形式に関する論文を発表し、フロンタルの法写像と接写像の特異点を研究した。また、アフィン直線族の補空間のトポロジーの論文、コフロンタル写像に関する論文、さらにカルタン分布、すなわち(2,3,5)分布の双対性に関する論文やナッシュ関数の複雑性に関する結果も出版し、さらにフロンタル特異点に関する総合報告を執筆した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

幾何学的特異点論は、数学の中で最も歴史のある幾何学の中で、他分野との関連や応用上重要な視点となる特異点に注目することにより新しい視点を与え、学術的に幾何学の新しい側面に光を照らす研究であり学術的な意義は深く広い。また、空間識、あるいは、時空識の研究への応用が期待されていて、社会的意味も大きいと期待される。

研究成果の概要(英文)：As developments and applications of geometric singularities and, we have succeeded to classify singularities of parallels to developable surfaces. We have investigated singular curves of (3,5) and (4,7) distributions, the results of which are going to be published. During all periods of the research, we have performed international researches, further we have published the survey article on symplectic singularities and studied normal and tangential maps to frontals. Also we published papers on the topology of complements to affine line arrangements, on the duality of Cartan distributions, i.e. (2, 3, 5)-distributions and published results on the complexity of Nash functions. Moreover we have wrote an integrated survey paper on frontal singularities.

研究分野：幾何学(特異点論)

キーワード：フロンタル 幾何学的制御理論 サブリーマン幾何 特異曲線 接触構造 単純リー環 接分布 双対性

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は、従来より、幾何構造に付随して現れる特異性を、幾何学の発展認識に根ざして研究してきた。幾何学はユークリッド幾何学から始まり、長い年月を経たのち、あるいはクライン幾何学として、あるいはリーマン幾何学として発展し、それらはカルタン幾何学として止揚されたと考えることができる。ただし、この観点は、たとえば、カルタン幾何がユークリッド幾何より優れた幾何学である、などといった短絡的な認識は意味しない。ユークリッド幾何が一番重要であることには変わりはない。本研究の大切な問題意識として、幾何学の発展認識をふまえた上で、様々な幾何学における特異性を研究し、それぞれの幾何学の関係性の理解の深化に貢献すること、さらに、種々の幾何学に横断的に現れる特異性の本質の理解を同時に深めることである。実際、ある特定の幾何学における特異点の分類の解決を目指す場合でも、幾何学の発展認識、幾何学間の関係性は非常に重要である。具体的な問題の解決するための発想も、手段（たとえば、特異点の認識問題の解）も、また解決後の応用についても、様々な幾何学におけるアイデア、手法、幾何構造自体の理解が不可欠である。このような自然な、しかし切実であって、誰かが意識して推進しなければならない課題をこうして見出した上は、この課題の解決に努力し邁進するという止むに止まれぬ思いが本研究を行う動機であり背景であった。

2. 研究の目的

本研究課題では、幾何構造に関連して重要な方程式の幾何学的解および解曲面を、幾何学的制御理論の側面からその対称性・双対性・特異性に注目して研究するものである。そのために、ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の一般化としてフロンタル写像の特異点論を発展させる。幾何構造によって必然的に現れる特異性の分類リストは幾何構造に依存して変化するが、その相違が幾何構造の特性であることに着目し、幾何学的動機付けのもとで特異点の解析・分類を行い、特異点とその分類の幾何学的意味を明らかにし、幾何学の新たな方法を提示・応用することを目的とする。具体的な研究目標は次の通りである：

テーマ1. 微分式系・制御系に付随する微分方程式と解の対称性・双対性・特異性。

テーマ2. フロンタル写像の特異性の認識問題の深化と微分幾何学への応用。

テーマ3. 幾何学的に関わる特異性分類問題の幾何ロバスト性とモジュライの幾何学化。

3. 研究の方法

研究の方法を各目標に沿って述べる。

テーマ1. 微分式系・制御系に付随する微分方程式と解の対称性・双対性・特異性。

本研究で注目するのは、幾何構造・空間構造の中で、自然に導かれる幾何学的対象の持つ特異性、幾何学的特異点である。変分問題や制御系と関連して、シンプレクティック・接触幾何学における特異ラグランジュ・ルジャンドル多様体の方程式やモンジュ・アンペール方程式を始めとする、幾何構造から自然に導かれる方程式でありながら、極めて退化したシンボルを持ち解空間が非常に特異性を有するものが数多くある。特異ラグランジュ・ルジャンドル多様体を定める1階偏微分方程式、 D_4 -共形構造のナル曲面の研究におけるラグランジュ曲面のガウス写像の直交条件(2階)方程式、 G_2 構造((2, 3, 5)分布)に付随する方程式など、単純であるが非常に退化した特異性を持つ方程式の解析が不可欠となる。このような退化した方程式の解空間の構成、変形問題、解空間の特異性・双対性の研究を、特に G_2 幾何、 D_4 幾何の枠組み、およびその一般化に対して幾何学的に行った。また、 G_2 -構造、 D_4 構造の双対性(三対性)などの大域的構成問題を扱った。

テーマ2. フロンタル写像の特異性の認識問題の深化と微分幾何学への応用。

フロンタル写像とは、特異点においても接平面が定まる写像であり、幾何学的特異点論や特異点をもつ曲線・曲面の微分幾何学において中心的な研究対象となっている。梅原・佐治・山田等は、ユークリッド空間やミンコフスキー空間の平均曲率一定フロンタル超曲面の微分幾何学を展開している。研究代表者は、フロンタル概念を余次元一般に拡張し基礎理論を与へ(G. Ishikawa, Singularities of frontals, Advanced Studies in Pure Math., 78, (2018), 55(106)、さらに、微分幾何学への応用のため、種々のフロンタル特異点の認識問題に対して一般的な定理

群を与えた(G. Ishikawa, Recognition problem of frontal singularities, arXiv:1808.09594 [math.DG], provisionally accepted in J. of Singularities). また一方, 不定値計量の幾何, ナル錐(共形幾何)においては, ナル曲面の一般化であるナル・フロントルの概念を導入し, 双対性・三対性(triality)を明らかにした(G. Ishikawa, Y. Machida, M. Takahashi, 2015), さらにフロントル概念の双対概念として, "コフロントル"の概念にまで到達している(G. Ishikawa, Cofrontals, (2018), preprint.) このようにフロントル特異性とそれに関連する特異性の特徴づけをさらに深め発展させ, 微分幾何学への応用することが本研究課題の研究方法である.

テーマ3. 幾何学に関わる特異性分類問題の幾何ロバスト性とモジュライの幾何学化.

研究代表者による空間曲線の接線曲面の研究において, 空間の幾何構造を変化させたときの特異性の現れの安定性, 特異点分類の幾何構造の摂動に関する, ある意味でのロバスト(robust, 鈍感)性を証明することができ, その結果, その特異性の出現に関する本質を捉えることができた(Ishikawa-Yamashita 2017,2018). カルタン幾何学の観点からナル錐構造や G_2 構造などに対して, すでに得られている平坦な場合の特異点の分類が幾何構造の変形に関してロバスト性を持つかどうか, 特異点の認識問題の深化を応用して検証することが本研究の目標である. 特異点の分類には一般にモジュライが現れるが, 通常, 有限リストにまとめて分類・表示する. 研究代表者は, 平面曲線の微分同相分類をシンプレクティック分類を使ってを再構成・一般化し, シンプレクティック・モデュライ空間から通常のもデュライ空間への全射の層化(stratification)を代数的に構成した(Ishikawa-Janeczko2010). この stratification による有限表示やモデュライについて, シンプレクティック幾何学としての意味づけを見出すことは未だ明確でない. 幾何学背景をもつ特異点の分類に必然的に現れるのモデュライを幾何の言葉で明確に意味付ける.

4. 研究成果

本研究課題に関して得られた研究成果を年度ごとに述べる.

(1) 2019年度は, 本研究課題の目的, すなわち, 幾何構造に関連して重要な方程式の幾何学的解および解曲面を, 幾何学的制御理論の側面からその対称性・双対性・特異性に注目して研究し, そのために, ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の一般化としてフロントル写像の特異点論を発展させ, 幾何構造によって必然的に現れる特異性の分類リストは幾何構造に依存して変化するが, その相違が幾何構造の特性であることに着目し, 幾何学的動機付けのもとで特異点の解析・分類を行い, 特異点とその分類の幾何学的意味を明らかにし, 幾何学の新たな方法を提示・応用する研究を行なった. 当初の計画通りに, 九州(6月), ヴァランシア(10月), 京都(12月)における幾何学あるいは特異点論の研究会に出席・講演し, 参加者と問題意識を共有しながら研究連絡を行った. また, ワルシャワ(ポーランド)において研究協力者のヤネチコ教授(ワルシャワ工科大)と研究連絡を行った. 出張を予定していた静岡(2020年3月)の研究会は中止となった.

(2) 2020年度は, 2019年度に引き続き, 本研究課題の目的, すなわち, さまざまな幾何構造に関連して重要な方程式の幾何学的解および解曲面を, 幾何学的制御理論の側面からその対称性・双対性・特異性に注目して研究した. 特に, ラグランジュ・ルジャンドル特異点論の一般化としてフロントル写像の特異点論をさらに発展させた(G. Ishikawa, Recognition Problem of Frontal Singularities, Jour of Singularities, vol.21 (2020), 149--166). また, ユークリッド空間内の法平坦なフロントルの平行フロントルを定義し, 特にフロントル曲線の接線曲面について, 平行フロントルの特異性に関する結果を得るなど, 幾何学の新たな方法を提示・応用する研究を行なった. この研究は, ユークリッド空間から一般的なクライン幾何・リーマン幾何, さらにカルタン幾何の枠組みへの一般化を内包した研究であることから注目している. 新型コロナウイルスの影響で, 残念ながら予定していた2020年度の国内・海外の研究打ち合わせ出張はすべて中止またはオンライン研究会となった. そのため, オンラインによる研究環境を強化するためパソコンを1台購入した. 海外出張予定だったロシアおよびブラジルでのオンライン研究会において当該研究のポスター発表を行い, 関連して研究成果(Goo Ishikawa, Normal and tangent maps to frontals, to appear in Journal of Mathematical Sciences,)を出版確定した. また, 研究協力者のヤネチコ教授(ワルシャワ工科大, ポーランド)と共同研究を出版した(G. Ishikawa, S. Janeczko, Singular mappings and their zero-forms, Pure and Applied Mathematics Quarterly, Volume 16, Number 5, (2020) 1643--1657.). 新型コロナウイルスのため, 研究課題を遂行に必要な研究連絡・研究打ち合わせのための国内・海外出張ができなかったため, 研究の進展が遅れていることは否めない. しかし, オンライン研究会に参加し, また, 研究協力者とオンラインで定期的に研究連絡をすることで補うことで, 大幅な研究の遅れは生じなかった.

(3) 2021年度は、本研究課題の目的、すなわち、幾何構造に関連して重要な方程式の幾何学的解および解曲面を、幾何学的制御理論の側面からその対称性・双対性・特異性に注目して研究し、前年度開始した研究であるフロンタル曲線の接線曲面について、平行フロンタルの特異性に関する結果と幾何学の新たな方法を深める研究を行い、成果を論文をして投稿し、出版確定することができた。参加予定だった研究会はコロナ感染症の蔓延のためにすべてオンラインとなり、研究会参加のための出張はとりやめることとなった。オンライン研究会においては、曲線の接線曲面の平行曲面の特異点の分類に関する研究についての成果発表を行った。2022年3月ようやく研究打ち合わせの国内出張を1件行うことができ、中断し懸案であった双曲 C_3 型分布の特異曲線に関する静岡大の待田講師と共同研究を推進させることができた。9次元多様体上の階数3の完全非可積分な分布で、ある曲面上の任意の曲線が特異積分曲線になるようなものが存在することを発見した。このような曲面は「特異曲面」と呼ぶことができる。特異曲面が存在する場合、アブノーマル測地線の空間は無次元となる。可積分系の場合、それぞれの葉の中の曲線は特異積分曲線になるが、それらは1つの葉を出ることはなく閉じ込められている。しかし、完全非可積分の場合は、アブノーマル測地線は閉じ込められず、どこにでも滲み出すことができる。特異曲面が現れる典型的な例は6次元シンプレクティックベクトル空間のある種の旗多様体上のカノニカルな分布として構成される。今回見つけた現象は、階数2の分布の場合にはあり得ないおもしろい現象である。この研究は、本件研究課題の幾何学的特異点論の発展にとって非常に本質的であると考えられる。2021年度は、オンライン研究会のための機材と参考図書を購入し、静岡大への1件の出張の旅費を使用した。コロナ感染症の蔓延のため、対面の研究会への参加、研究連絡、成果発表などが十分に行うことができなかつたものの、オンラインおよび個別の出張により、画期的な発見をすることができ、研究の遅れを2021年度で取り戻すことができた。

(4) 2022年度は、研究課題の目的に従い、フロンタル曲線の接線の織りなす接線曲面について、平行フロンタルの特異性に関する結果とその幾何学的不変量を求める新たな方法を与える研究を推進し、その成果の論文を学術雑誌の東北大学数学雑誌から出版することができた。また、7次元多様体上の階数4の分布で、増加ベクトルが(4, 7)のもの、とくに、双曲 C_3 型分布の特異曲線に関する研究を(3, 6)分布、 B_3 型分布との関連を含め完成に近づけることができた。さらに、2021年度に発見した対象である「特異曲面」、すなわちその曲面上の任意の曲線が特異積分曲線になるような分布の例を2022年度においてさらに構成することができた。その一方で、一般的なリーマン曲面の接触サブリーマン測地線のルジャンドル特異点の完全な分類を行った。この場合は扱う分布は接触分布であるので特異曲線は現れないが、サブリーマン測地線にいわゆるルジャンドル特異点は現れることになる。そのルジャンドル特異点の完全な分類を与えることに成功し、現在投稿準備中である。さらに、接線曲面と関連して二重数(dual number)上の特異点論を創始し、その視点から複素特異点と実特異点の関係を考察することができた。さらに、フロンタル・ジェットに関する研究を進めることができた。これらの研究を推進できたこと、そしてその成果を発表できたことは、本件研究課題の幾何学的特異点論の発展にとって非常に本質的であると考えられる。2022年度は、国内の出張の旅費、および、課題研究のための参考図書の購入に予算を使用した。コロナ感染症のため、対面の研究会への参加、研究連絡、成果発表などが完全に十分には行うことができず、また、特に海外出張は断念することになったが、それを補うために、オンライン等の代替手段を用いて研究発表、研究連絡を行いある程度補うことができたため研究の進展に大きな支障はなかつた。

(5) 2023年度は、幾何学的特異点論に関する研究として、最終年度において、接可展面の平行曲面の特異点を分類することに成功した(Singularities of parallels to tangent developable surfaces, Tohoku Mathematical Journal, vol.75-2, (2023), 233--249.) また(3,5)型および(4,7)型接分布の特異曲線について研究し出版予定である。また研究期間全体を通じて、国際共同研究を行いシンプレクティック特異点の概説論文 G. Ishikawa and S. Janeczko, Symplectic singularities of differentiable mappings, in Differential geometry, Calabi-Yau theory, and general relativity, Lectures and articles celebrating the 70th birthday of Shing Tung Yau, Surveys in Differential Geometry, Volume 24-II, published in 2021. International Press, pp. 117--172, および特異写像の零形式に関する論文 G. Ishikawa, S. Janeczko, Singular mappings and their zero-forms, Pure and Applied Mathematics Quarterly, Volume 16, Number 5, (2020) 1643--1657 を発表した。さらに、フロンタルの法写像と接写像の特異点を調べ、また、アフィン直線族の補空間のトポロジー、さらにフロンタル特異点に関する総合報告を執筆し、併せてコフロンタル写像に関する論文、さらにカルタン分布、すなわち(2,3,5)分布の双対性に関する論文 G. Ishikawa, Y. Kitagawa, A. Tsuchida, W. Yukuno, Duality of (2,3,5)-distributions and Lagrangian cone structures, Nagoya Mathematical Journal. Cambridge University Press: 23 January 2020, pp. 1-13. を発表し、また、ナッシュ関数の複雑性に関する結果も得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 9件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 3件）

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Goo Ishikawa | 4. 巻 75-2 |
| 2. 論文標題 Singularities of parallels to tangent developable surfaces | 5. 発行年 2023年 |
| 3. 雑誌名 Tohoku Mathematical Journal | 6. 最初と最後の頁 233-249 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2748/tmj.20211220 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Ishikawa Goo, Janeczko Stanislaw | 4. 巻 24-2 |
| 2. 論文標題 Symplectic singularities of differentiable mappings | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Surveys in Differential Geometry | 6. 最初と最後の頁 117-172 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Ishikawa Goo | 4. 巻 255-5 |
| 2. 論文標題 Normal and Tangent Maps to Frontals | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Mathematical Sciences | 6. 最初と最後の頁 664-677 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Ishikawa Goo, Oyama Motoki | 4. 巻 22 |
| 2. 論文標題 Topology of complements to real affine space line arrangements | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Singularities | 6. 最初と最後の頁 373-384 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |

| | |
|---|-------------------------|
| 1. 著者名 Goo Ishikawa, Stanislaw Janeczko | 4. 巻 16-5 |
| 2. 論文標題 Singular mappings and their zero-forms | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly | 6. 最初と最後の頁 1643-1657 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Ishikawa Goo | 4. 巻 21 |
| 2. 論文標題 Recognition Problem of Frontal Singularities | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Journal of Singularities | 6. 最初と最後の頁 149-166 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5427/jsing.2020.21i | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|---|-----------------------|
| 1. 著者名 Goo Ishikawa, Tatsuya Yamashita | 4. 巻 71-3 |
| 2. 論文標題 Leibniz complexity of Nash functions on differentiations | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan | 6. 最初と最後の頁 709-726 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jms/76877687 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Goo Ishikawa | 4. 巻 60-4 |
| 2. 論文標題 Cofrontals | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics | 6. 最初と最後の頁 461-478 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である) | 国際共著 - |

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Goo Ishikawa, Yumiko Kitagawa, Asahi Tsuchida, Wataru Yukuno | 4. 巻 243 |
| 2. 論文標題 Duality of (2,3,5)-distributions and Lagrangian cone structures | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 Nagoya Mathematical Journal | 6. 最初と最後の頁 303-315 |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/nmj.2019.46 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計13件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 9件)

| |
|---|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 Legendre singularities of sub-Riemannian geodesics |
| 3. 学会等名 Singularity theory and its applications, RIMS-Sing 1 Workshop (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 Singular curves of (4, 7) distributions and C_3 , |
| 3. 学会等名 Correspondences of various geometries (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2022年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 Singularity theory over dual numbers |
| 3. 学会等名 Singularities of Differentiable Maps and its Applications (招待講演) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 (4, 7) distributions and algebraic curves on tori |
| 3. 学会等名 Singularities of Differentiable Maps and its Applications (招待講演) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 Frontal Jets |
| 3. 学会等名 Singularities of Differentiable Maps and its Applications (招待講演) |
| 4. 発表年 2023年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Ishikawa Goo |
| 2. 発表標題 Singularities of parallels to tangent developable surfaces |
| 3. 学会等名 24-th Petrovskii Conference, Differential Equations and Related Topics (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Ishikawa Goo |
| 2. 発表標題 Singularities of parallels to tangent developable surfaces |
| 3. 学会等名 The Future of Singularity Theory (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Ishikawa Goo |
| 2. 発表標題 Singularities of parallels to tangent developable surfaces |
| 3. 学会等名 The Sao Carlos Singularity Theory Webinar, UFSCar and ICMC - USP (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2021年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 Singularities of parallels to tangent maps of frontals, |
| 3. 学会等名 16th International Workshop on Real and Complex Singularities (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|---|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa, |
| 2. 発表標題 Tangential and Normal Maps to Frontals |
| 3. 学会等名 The International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems 2020 (国際学会) |
| 4. 発表年 2020年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 On Normal and Tangential Maps to Frontals |
| 3. 学会等名 6th International Workshop on Singularities in Generic Geometry and its Applications (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 Several problems on singularities of implicit differential equations and related topics |
| 3. 学会等名 Singularity Theory and its Applications in Differential Equations and Differential Geometry (招待講演) (国際学会) |
| 4. 発表年 2019年 |

| |
|--|
| 1. 発表者名 Goo Ishikawa |
| 2. 発表標題 A remark on the geometric theory of third order ordinary differential equations |
| 3. 学会等名 Muroran Workshop 20 (招待講演) |
| 4. 発表年 2019年 |

〔図書〕 計1件

| | |
|-----------------|-----------------|
| 1. 著者名 石川 剛郎 | 4. 発行年 2022年 |
| 2. 出版社 共立出版 | 5. 総ページ数 208 |
| 3. 書名 微積のあたま | |

〔産業財産権〕

〔その他〕

| |
|---|
| List of Published Papers by Goo Ishikawa https://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ishikawa/paper.html |
|---|

6. 研究組織

| | | | |
|--|---------------------------|-----------------------|----|
| | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|--|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 | | | |
|---------|-----------|--|--|--|
| ポーランド | ワルシャワ工科大学 | | | |