様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　５ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：１３３０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2022
課題番号：１９Ｋ０３４６４

研究課題名（和文）曲面の被覆の形をした曲面結び目

研究課題名（英文）Surface links in the form of coverings of a surface

研究代表者
中村　伊南沙（Nakamura, Inasa）

金沢大学・電子情報通信学系・准教授

研究者番号：６０５６８１６１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円

研究成果の概要（和文）：「曲面結び目」とは、４次元ユークリッド空間内に滑らかに埋め込まれた閉曲面のことである。ここでは向き付けられた曲面結び目を扱う。
曲面結び目の中でも特に、ある曲面を底空間として、それの分岐被覆または非分岐被覆の形をした曲面結び目「分岐被覆曲面結び目」について、図式の変形や不変量を通して、その性質を研究した。具体的には、チャートというグラフの変形を通して得られる「単純化数」の評価を模索し、特殊な「分岐被覆曲面結び目」である「トーラス被覆結び目」の結び目群の既約なメタベリアンSU(2)表現の数について、アレクサンダー行列との関係、さらにフォックスのp-彩色によるカンドル彩色数との関係を求めた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
曲面結び目は未だに性質が詳しく解明されていない。既存の構成例で系統的に構成されるものは、球面の埋め込みである「２次元結び目」が主流である。不変量についても現時点では限られたものしか整備されていない。球面は種数０の曲面であるが、「分岐被覆曲面結び目」を通して種数１以上の曲面結び目を研究することにより、種数が１以上の曲面結び目について、より理解が進むことが考えられる。

研究成果の概要（英文）：A surface-link is a closed surface embedded smoothly in the Euclidean 4-space. We treat oriented surface-links. We studied branched covering surface-links, that are surface-links in the form of branched or unbranched coverings of a surface. We studied estimates of an invariant called the "simplifying number", by investigating local moves for graphs called charts. Further, we studied the knot groups of torus-covering knots, that are special branched covering surface-knots, and we showed a result concerning the number of irreducible metabelian SU(2)-representations of the knot group using the Alexander matrix and using the number of quandle colorings of Fox p-colorings.

研究分野：トポロジー

キーワード：曲面結び目　曲面ブレイド　チャート　結び目群　カンドル

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

「曲面結び目」は、4次元ユークリッド空間の中への閉曲面の埋め込みの像である。ここでは曲面結び目は向き付けられているとする。全同位によって与えられる同値類を扱う。曲面結び目の研究[S. Carter, S. Kamada and M. Saito: "Surfaces in 4-space", Encyclopaedia of Mathematical Sciences 142, Low-Dimensional Topology III, Berlin, Springer-Verlag, 2004]は、1925 年の Artin によるスパン 2 次元結び目の構成を端緒とする。１９世紀から研究されている 3 次元ユークリッド空間内の 1 次元の結び目に対し、曲面結び目はまだ未開拓な部分が多い分野である。結び目の研究は主にその構成法の研究および不変量の研究から成り立っている。「構成法」は、4 次元空間を 3 次元空間かける時間とみなして、3 次元空間内の 1 次元結び目（または、ブレイドやタングルなど、1 次元の部分多様体）から時間変化を指定することにより、全体として 4 次元空間内の曲面結び目をどう構成するのかを具体的に指定する方法のことである。「不変量」とは、同値な結び目について同じ値が定まる数学的量のことである。曲面結び目は構成法すらあまり知られていない。既存の構成例で系統的に構成されるものはスパン 2 次元結び目[Artin 1925]、ツイストスパン 2 次元結び目[Zeeman 1965]など、球面の埋め込みである「2 次元結び目」が主流である。不変量についても、すべての図式を考えたときに、各図式に現れる 3 重点の数の最小値である「最小 3 重点数」など、すべての図式を用いて定義される不変量が大多数であり、現時点では、簡単な場合に組み合わせ論と数え上げの議論によってこれらの不変量を決定するといった研究がなされている段階である。「図式のひとつ」があれば計算できる不変量は、結び目補空間の基本群である「結び目群」や「カンドルコサイクル不変量」[Carter-Jelsovsky-Kamada-Langford-Saito 2003]が主であり、今後さらなる発展が見込まれる。

「トーラス被覆結び目」と「分岐被覆曲面結び目」、およびそれに関する問題

報告者は以前の研究において、新たな曲面結び目の構成法として、自明なトーラス上の曲面ブレイドの形で表せる曲面結び目「トーラス被覆結び目」の概念を導入した。 T を 4 次元ユークリッド空間内の標準的なトーラスとする。「トーラス被覆結び目」とは、トーラス T の管状近傍 N(T)内に埋め込まれていて、T 上への自然な射影が被覆になっている曲面結び目である。

トーラス被覆結び目は、トーラス T を底空間とする被覆空間であるとみなせる。言い換えると、「トーラスの管状近傍内の曲面ブレイド」の 4 次元空間内への埋め込みである。そこで、トーラス被覆結び目の拡張として、「曲面の管状近傍内の曲面ブレイド」の埋め込みとして構成される曲面結び目を「分岐被覆曲面結び目」と呼ぶことにした。分岐被覆曲面結び目は、底空間がそれ自体曲面結び目であるとき、それの被覆として構成される曲面結び目である。曲面ブレイドは曲面上に描かれる有限グラフ「チャート」で表される。「チャート」は Kamada によって、球面上の曲面ブレイドについて導入された。同値な曲面ブレイドはチャートの局所変形「チャートムーブ」によって移りあう。また、同値な曲面結び目は、曲面図式の局所変形「ローズマンムーブ」によって移りあう。構成法より分岐被覆曲面結び目は曲面図式上のチャートで表される。報告者は以前の結果で「チャート付き曲面図式のローズマンムーブ」を導入した。これとチャートの局所変形「チャートムーブ」を組み合わせることにより、分岐被覆曲面結び目の局所変形による同値類の研究が可能になった。

分岐被覆曲面結び目の単純化

　報告者は以前の研究で、チャートループ付き 1-ハンドルを加えるという操作が、任意の曲面結び目上の任意の曲面ブレイドすなわち分岐被覆曲面結び目について、ブレイドを解消してある「単純な形」

に変形する操作であることを示した。ここでいう「単純な形」とは、両端点に「黒い頂点」をもつ辺がいくつかあるほかは、チャートの辺が 1-ハンドル上にループとしてしか存在しないような形である。
この「単純化」に必要な 1-ハンドルの数の最小値を「単純化数(simplifying number)」と名付け、単純化数と、同様にして得られる「weak simplifying number」の上からの評価を求めた。しかし、上からの評価は実際にチャートを変形することによって得られるが、これまでに確立していない他の変形方法によって、よりよい評価が得られる可能性が残されている。下からの評価は未だに得られておらず、さらには単純化数の決定という大きな問題が残っていた。

2. 研究の目的

研究の目的を以下に挙げる。

(1) これまでの報告者の結果をもとにしつつ、分岐被覆曲面結び目を表す図式「曲面上のチャート」の変形方法を扱う手法をさらに発展させる。
(2) 分岐被覆曲面結び目の不変量の計算方法を確立する。具体的にはカンドルコサイクル不変量、最小3重点数、結び目解消数、結び目群など
(3) 「分岐被覆曲面結び目」の不変量の中でも特に「単純化数」および「弱い意味での単純化数」について、その評価を調べる。
(4) 分岐被覆曲面結び目をとるという操作がどれだけ曲面結び目を分類するのに有効か調べる。

3. 研究の方法

分岐被覆曲面結び目は、曲面図式上の描かれるある種のグラフ「曲面図式上のチャート」で表される。従来の球面上のチャートについては、M. Iwakiri 氏、S. Kamada 氏、T. Nagase 氏、A. Shima 氏などによって多くの先行研究がなされている。それらの結果を曲面図式上のチャートに拡張し、報告者自身のそれまでの手法も用いることによって、曲面図式上のチャートの変形について研究する。また、カンドルコサイクル不変量などの不変量の計算については、「分岐被覆曲面結び目」のなかでも特に「トーラス被覆結び目」について考察する。「トーラス被覆結び目」は標準的に埋め込まれたトーラス T の被覆の形という特殊な形をしているため、T のメリディアンとロンジチュードに対応する1次元のブレイドを用いて、その結び目群などを計算することができるため、まずは「トーラス被覆結び目」について不変量の考察をし、それを一般の「分岐被覆曲面結び目」に拡張することを試みる。

4. 研究成果

分岐被覆曲面結び目の「単純化数」について、チャート変形についての既存の研究結果について資料収集を行い、それに基づきながら、単純化するためのチャートの新たな変形を模索した。
また、チャートの変形による「単純化数」および「弱い意味での単純化数」の上からの新しい評価を模索した。
また、「トーラス被覆結び目」の結び目群の研究として、次のような結果を得た。ここで、結び目群とは結び目の補空間の基本群のことである。トーラス被覆結び目の結び目群について考察し、それの既約なメタベリアンSU(2)表現の数について、アレクサンダー行列との関係、さらにフォックスのp-彩色によるカンドル彩色数との関係を求めた。1次元の結び目群の既約なメタベリアンSU(2)表現の数について、アレクサンダー多項式からも定まるknot determinantとの関係についての先行研究があるが、トーラス被覆結び目の結び目群の表示と1次元結び目の結び目群の表示の類似性を用いて、1次元の場合の議論を使用することで、この結果を得ることができた。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計6件（うち招待講演　2件／うち国際学会　1件）

１．発表者名 中村伊南沙
２．発表標題 Torus-covering knot groups and their irreducible metabelian SU(2)- representations
３．学会等名 金沢トポロジーセミナー
４．発表年 2023年

１．発表者名 中村伊南沙
２．発表標題 Torus-covering knot groups and their irreducible metabelian SU(2)- representations
３．学会等名 北陸結び目セミナー２０２２
４．発表年 2022年

１．発表者名 中村伊南沙
２．発表標題 Torus-covering knot groups and their irreducible metabelian SU(2)- representations
３．学会等名 離散数学とその応用研究集会2021　ミニシンポジウム「組みひもと結び目」（招待講演）
４．発表年 2021年

１．発表者名 中村伊南沙
２．発表標題 Branched covering surfaces in 4-space and simplifying numbers
３．学会等名 Women in Geometry and Topology　（国際学会）
４．発表年 2019年

１．発表者名 中村伊南沙
２．発表標題 トーラス被覆結び目の結び目群のSU(2)表現について
３．学会等名 五箇山トポロジー・幾何セミナー2019
４．発表年 2019年

１．発表者名 中村伊南沙
２．発表標題 ４次元空間内の分岐被覆曲面の単純化数の上からの評価について
３．学会等名 立命館大学幾何学セミナー（招待講演）
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関