

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 5 月 29 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03466

研究課題名(和文) 曲面結び目の射影図による構成と不変量による分類の研究

研究課題名(英文) Construction by diagram and classification by invariant of surface-knot

研究代表者

佐藤 進 (Sato, Shin)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：90345009

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：曲面結び目理論における構成と分類は基本的課題である。本研究では射影図を用いて構成し、不変量を用いて分類することを目的とした。3重点数が4である2次元結び目の射影図をガウス図を用いて表示する手法を開発し、3重点数が4であるための必要十分条件が2ツイストスパン三葉結び目とリボンコンコダントであることを示した。また種数1の有向リボン曲面結び目を表す仮想結び目に対し、捩れ多項式と独立な3種類の交差多項式を導入し、特徴付けや連結和に関する性質を解明した。捩れ多項式に付随する奇捩れ数と対応する局所変形を決定した。さらに仮想結び目・絡み目の新たな局所変形を複数導入し、それらに対応する不変量を決定した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

曲面結び目の表の作成は、分類と構成の観点から重要な課題であり、その中で3重点数が4である2次元結び目の決定は意義が大きい。その手法は古典的結び目のガウス図を踏襲しており、種数が正である曲面結び目の分類にも応用ができる。リボン曲面結び目は仮想結び目で表示できるため、仮想結び目の不変量の研究は曲面結び目の研究につながる。本研究で導入した3種類の交差多項式は既知の不変量と独立な新しいもので、仮想結び目の連結和などに関し多くの応用を与えた点でインパクトがある。奇捩れ数に対する局所変形や、仮想デルタ変形などに対応する不変量の決定は、結び目理論における代数的・幾何的構造を明らかにする点で重要である。

研究成果の概要(英文)：The construction and classification of surface-knots are fundamental problems in surface-knot theory. The aim of this study is to construct surface-knots via diagrams and classify them via invariants. We develop a method to present diagrams of 2-knots of triple point number four via diagrams, and prove that a 2-knot has the triple point number four if and only if it is ribbon-concordant to the 2-twist-spun trefoil knot. It is known that an oriented ribbon surface-knot of genus one is presented by a virtual knot. We define three kinds of intersection polynomials of a virtual knot, which are independent of the writhe polynomial, and give a characterization of the polynomial and several properties on the connected sum. We also give a local move called a Xi-move corresponding to the odd writhe of a virtual knot. Furthermore we introduce virtualized Delta-, sharp-, and pass-moves and determine the invariants corresponding those local moves.

研究分野：結び目理論

キーワード：曲面結び目 2次元結び目 射影図 3重点数 不変量 仮想結び目 交差多項式 局所変形

1. 研究開始当初の背景

3次元ユークリッド空間の中の円周を古典的結び目といい、4次元ユークリッド空間の中の閉曲面を曲面結び目という。特に2次元球面のとき2次元結び目という。古典的結び目理論に比べて曲面結び目理論の研究が遅れている大きな原因のひとつに視覚化の難しさが挙げられる。古典的結び目理論の発展の背景には射影図を用いた表の作成と不変量の構成がある。曲面結び目に対しても同様に射影図を含めたいくつかの視覚化が利用されているものの、研究に利用するには多くの課題があり、表の作成はあまり進んでおらず、また基本的なものを除き不変量の構成と計算も実行できていなかった。

2. 研究の目的

(1) 曲面結び目(特に2次元結び目)の射影図を取り扱う手法を考案する。曲面結び目の射影図は一般に3次元ユークリッド空間におけるジェネリックな曲面と、その自己交差集合に沿った上下の交差情報の組として与えられるが、これを研究に利用できるようにモデル化、簡素化する手段を提案する。さらにそのような手法を通して、曲面結び目の射影図がみたく性質を明らかにすることで、曲面結び目の表の作成につなげる。

(2) 種数が1である有向リボン曲面結び目は仮想結び目を用いて表現できる。したがって仮想結び目の不変量を構成することは、曲面結び目の不変量の研究につながる。仮想結び目の不変量のひとつに捩れ多項式があるが、これは閉曲面上の曲線の交差数の1次元的な解釈ができる。そこで、交差数の2次元的な観点に対応する、仮想結び目の新しい不変量の発見を目指し、その性質を解明することで、曲面結び目の不変量の研究につなげていく。

(3) 結び目理論における局所変形の研究は、結び目の集合の代数的構造と幾何的構造の関係を明らかにする上で基本的なテーマである。まず、仮想結び目の奇捩れ数にはクシイ変形に対応することがわかっている。そこで逆に2成分の仮想絡み目に対応する不変量を特定することを目指す。次に仮想デルタ変形という局所変形に対応する不変量を調べる。さらに仮想結び目に向きが指定されているときには、仮想デルタ変形はふたつのクラスに分けられるが、それぞれの局所変形に対応する不変量を特定する。加えて仮想結び目が有向な場合は仮想シャープ変形および仮想パス変形を定義することができる。これらに対応する仮想結び目の不変量の特定も目指す。

3. 研究の方法

(1) 曲面結び目の射影図の2重点集合はいくつかの円周および線分のはめ込みとみなせる。2重点曲線は各3重点において3回通過し、線分の端点はブランチ点である。このような2重点集合を記述するために、古典的結び目理論で用いられるガウス図式のアイデアを利用する。すなわち2重点集合の逆像である円周と線分に、3重点の逆像である3点をつなぐ三又コードを貼って表現する。このコードには3重点の符号と、その端点に上中下の情報を付加する。また、2重点集合の閉曲面における逆像である2層集合は、いくつかの円周のはめ込みとみなせることから、通常のガウス図式で表現される。2階層集合の性質と、2重点集合と2階層集合の関係から、2重点集合の性質を明らかにする。

(2) 曲面結び目のうち種数1でリボン型のものは仮想結び目を用いて表せ、さらに仮想結び目は有向閉曲面上の射影図を用いて表せる。ある交点において平滑化して得られる二つの曲線の交差数をその交点の指数とすると、すべての交点にわたる指数と符号の形式的な和が捩れ多項式である。この観察に基づき、すべての交点の「組」にわたる平滑化後の曲線の交差数と符号の形式的な和を考えると、これが仮想結び目の射影図の選び方によらないことが期待される。また仮想結び目の連結和による不変量の振る舞いを調べることで、仮想結び目の連結和の性質を明らかにする。トーラス上の閉曲線については平面の場合と同様に回転数が定義できることから、特に仮想結び目の台指数が1の場合には捩れ多項式による補正が不必要であると考えられるので、これについても調べる。

(3) 2成分仮想絡み目のクシイ変形を調べるため、2円をもつガウス図式を考えることにする。

(1.2) 絡み数と(2.1) 絡み数の和として全絡み数が定義される。クシイ変形を考える上で、全絡み数が奇数のときと偶数のときで状況が大きく異なることが予想される。特に全絡み数が偶数のときには奇捩れ数の拡張だけでは不十分であり、絡み数のさらなる精密化が必要となるため、コードのパリティという概念を導入することで解決を目指す。次に、古典的結び目理論におけるデルタ変形の仮想版として仮想デルタ変形を導入し、それが禁止変形を生成するかどうかを調べることで、仮想デルタ変形が非自明な不変量に対応するか、または結び目解消操作となるかを明らかにする。また仮想絡み目の場合に対応する不変量を特定するため、仮想デルタ変形による絡み数の変化を考察する。さらに仮想シャープ変形と仮想パス変形についても、その向きに応じて分類した上で同値類を考える。

4. 研究成果

(1) 2次元結び目の3重点数が4であるための必要十分条件は2ツイストスパン三葉結び目とリボンコンコールドであることを示した。これにより2次元結び目の3重点数4以下の表が(リボンコンコールドを除いて)完成したことになる。これらの証明で用いた手法をさらに精査することにより、2次元球面とは限らない閉曲面の場合にも、その3重点数を実現する射影図の自己交差集合がみたすべき必要条件を与えることができた。これを用いて、Yashiro氏らによる3重点数が2であるトーラスの曲面結び目の非存在の結果に対する簡易な別証明を与えることができた。これまでの研究で、2次元結び目の最小射影図(3重点数を実現する射影図)において、2つのブランチ点をつなぐ2重点線分上に3重点がちょうどひとつ存在することはないことが知られている。2次元結び目の切断面に現れる絡み目のプロパー性やこれまでに開発した手法を用いることで、2次元結び目の射影図の2つのブランチ点をつなぐ単純2重点線分に対し、それがミドルシートと横断的に交わる3重点の個数は偶数であることが示せた。

(2) 仮想結び目の射影図の2つの交点が決めるサイクルの交差数を指数とし、交点の符号の積を係数にもつ多項式の総和を4種類考え、それらのライデマイスター変形による変化を詳しく調べることにより、本質的に3種類の仮想結び目の不変量を発見した。この3種類は互いに独立であるだけでなく、ねじれ多項式とも独立な新しいものである。また、仮想結び目の対称性による変化や交点数の下からの評価、どのような多項式が交差多項式となりうるかという実現問題などの、交差多項式の性質を解明することができた。さらに応用として、任意の仮想結び目の組に対しその連結和が無限個存在することを示し、また曲面曲線のホモトピー類の不変量の構成とその閉曲面の種数に関する評価などを与えることができた。特に仮想結び目の台種数(仮想結び目の射影図を実現する閉曲面の種数の最小値)が1の場合には、トーラス上の閉曲線の回転数を利用することにより、その第三交差多項式を精密化することに成功した。

(3) 捻れ多項式の奇数次の項の係数の和は仮想結び目の奇捻れ数とよばれる。これまでの研究で、奇捻れ数はクシイ変形と呼ばれる局所変形と対応することが知られている。このクシイ変形を2成分仮想絡み目に拡張し、その同値類に対応する不変量を特徴付けすることに成功した。次に、仮想絡み目に対する仮想デルタ変形という局所変形を導入し、ふたつの仮想絡み目が仮想デルタ変形で移り合うための必要十分条件を絡み数に由来する「パリティ」を用いて与えることに成功した。特に仮想デルタ変形が仮想結び目に対しては結び目解消操作であることを示した。またこの精密化として、有向仮想絡み目に対する局所変形を研究した。特に有向仮想デルタ変形はふたつのクラス(タイプ1と2)に分けられる。加えて、有向仮想絡み目に対する仮想シャープ変形と仮想パス変形も考察することにより、タイプ1の仮想デルタ変形と仮想シャープ変形は局所変形として等価で、その分類はパリティで記述できること、また、タイプ2の仮想デルタ変形と仮想パス変形は等価でその分類はパリティの精密化である交差数で記述できることがわかった。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 J-B. Meilhan, S. Satoh, and K. Wada	4. 巻 263
2. 論文標題 Classification of 2-component virtual links up to Xi-moves	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Fund. Math.	6. 最初と最後の頁 203-234
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4064/fm168-10-2023	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 R. Higa, T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh	4. 巻 32
2. 論文標題 The intersection polynomials of a virtual knot II: Connected sums	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 2350067, 16 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216523500670	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 R. Higa, T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh	4. 巻 72
2. 論文標題 The intersection polynomials of a virtual knot I: Definitions and calculations	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Indiana Univ. Math. J.	6. 最初と最後の頁 2369-2401
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh	4. 巻 84
2. 論文標題 Writhe polynomials and shell moves for virtual knots and links	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European J. Combin.	6. 最初と最後の頁 103033, 24 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.ejc.2019.103033	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 T. Nakamura, Y. Nakanishi, and S. Satoh	4. 巻 29
2. 論文標題 A note on coverings of virtual knots	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Knot Theory Ramifications	6. 最初と最後の頁 1971002, 11 pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/S0218216519710020	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件 (うち招待講演 8件 / うち国際学会 4件)

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 2次元結び目の表の作成に向けて
3. 学会等名 2022日本数学会秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 ガウス語の平面性と2次元結び目
3. 学会等名 研究集会「4次元トポロジー」(招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 A note on the Gauss word of an arc on a 2-sphere
3. 学会等名 研究集会「拡大K00Kセミナー2021」(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 The intersection polynomials of a virtual knot
3. 学会等名 東京大学トポロジー火曜セミナー（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Shin Satoh
2. 発表標題 The intersection polynomial of a virtual knot
3. 学会等名 The 16th East Asian Conference on Geometric Topology（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 仮想結び目の交差多項式
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shin Satoh
2. 発表標題 Wirthe polynomials and shell moves for virtual knots and links
3. 学会等名 Intelligence of Low-dimensional Topology（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin Satoh
2. 発表標題 Welded braids and 2-dimensional braids of ribbon surface-links
3. 学会等名 Loops in Leeds (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shin Satoh
2. 発表標題 On the triple point number in surface-knot theory
3. 学会等名 Unifying 4-Dimensional Knot Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤進
2. 発表標題 正則ロースマン変形で表される局所変形について
3. 学会等名 那覇市伝統工芸館会議室 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------