

令和 6 年 5 月 9 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03467

研究課題名（和文）粗幾何学における次元概念と位相空間の研究

研究課題名（英文）Study on dimension and topological spaces in coarse geometry

研究代表者

山内 貴光（YAMAUCHI, Takamitsu）

愛媛大学・理工学研究科（理学系）・教授

研究者番号：00403444

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,200,000円

研究成果の概要（和文）：粗幾何学における次元に関する概念と、距離空間の粗幾何学性質を反映する位相空間について研究を行った。次元に関しては、有限集合からなる超空間のHilbert空間への粗埋め込み可能性と、漸近次元の超限的拡張である超限漸近次元に関する成果を得た。位相空間については、一般化されたGromov積による粗コンパクト化と、半直線のHigsonコロナの連結性に関する性質に関する成果を得た。さらに、群粗構造や群作用に対して定義される次元についても研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

有限集合からなる超空間のHilbert空間への粗埋め込み可能性の研究は、Gromov-Hausdorff距離空間の研究へ発展している。超限漸近次元に関する成果によって、Dydakによって導入された漸近的性質Dを超限漸近次元を用いて特徴付けることができた。一般化されたGromov積による粗コンパクト化の成果によって、粗コンパクト化の新たな記述が可能となった。半直線のHigsonコロナの連結性に関する成果によって、Higsonコロナの複雑な位相的性質を顕在化できた。

研究成果の概要（英文）：We studied notions related to dimension in coarse geometry and topological spaces which reflect coarse geometric properties of metric spaces. As for dimension, we obtained results on coarse embeddability of hyperspaces consisting of finite subsets into a Hilbert space, and on transfinite asymptotic dimension, which is a transfinite extension of asymptotic dimension. As for topological spaces, we obtained results on coarse compactifications by means of generalized Gromov products, and on connectedness properties of the Higson corona of the half line. We also studied group coarse structures and dimensions defined for group actions.

研究分野：幾何学

キーワード：粗幾何学 次元 位相空間

## 1. 研究開始当初の背景

粗幾何学は、距離空間の局所的情報を無視し、その粗い大域的構造を調べる幾何学である。その中心的な予想に粗 Baum-Connes 予想がある。粗 Baum-Connes 予想の十分条件に関わる漸近次元や Hilbert 空間への粗埋め込み可能性は、粗幾何学における基本概念である。「漸近次元が有限」ならば「Hilbert 空間へ粗埋め込み可能」であり、これら2つの性質の間には、性質 A、有限分解複雑性、漸近的性質 C 等の性質が知られている。しかし、これらの性質の関係については未解明な部分がある。また、固有距離空間の漸近次元と、その Higson コロナ(固有距離空間に対して定まるコンパクトハウスドルフ空間)の被覆次元が一致するかを問う Dranishnikov の問題や、CAT(0)群の漸近次元の有限性に関する問題等の未解決問題が残されている。以上の背景の下、未解決問題の解決を目指し、漸近次元に関する粗幾何学的性質や、Higson コロナ等、粗幾何学の情報を反映する位相空間について理解したいということが本研究の動機であった。

## 2. 研究の目的

漸近次元に関する種々の次元概念の関係を解明し、距離空間とその境界(または対応する位相空間)の間にある新たな性質を見出すこと、それによって粗幾何学及び位相空間論の進展に貢献することが、本研究の目的であった。

## 3. 研究の方法

粗幾何学、幾何学的群論及び位相空間論を中心に、研究集会への参加や研究協力者との研究打合せ及び文献により関連する研究動向を把握しながら研究を進めた。ただし、2020年~2022年は、新型コロナウイルス感染拡大により、オンライン会議や電子メールによる研究集会参加や研究打合せとなった。

## 4. 研究成果

本研究課題に関して以下の成果を得た。

(1) 距離空間  $X$  の有限な部分集合全体のなす集合  $\mathcal{F}(X)$  には、Hausdorff 距離と呼ばれる標準的な距離が定義される。この距離空間  $\mathcal{F}(X)$  は超空間と呼ばれる。超空間の位相次元に関する性質は知られているが、漸近次元に関する性質は分かっていた。そこで、T. Weighill 氏、N. Zava 氏と共同研究を行い、次を得た：長さが増大する区間の列が距離空間  $X$  に粗埋め込み可能であれば、 $\mathcal{F}(X)$  は Hilbert 空間に粗埋め込み可能でない(従って、漸近次元は無限である)。特に、実数直線  $\mathbb{R}$  の漸近次元は1であるが、その超空間  $\mathcal{F}(\mathbb{R})$  は Hilbert 空間に粗埋め込み可能でない。本成果と  $\mathcal{F}(X)$  の部分距離空間の性質についてまとめた論文は、学術誌 European Journal of Mathematics へ掲載された。本成果は、N. Zava 氏によって Gromov-Hausdorff 距離空間の研究へ発展している。

(2) 深谷、尾國(2020)は、測地的 Gromov 双曲空間や CAT(0)空間を含むクラスとして粗凸空間を定義し、固有な粗凸空間に対して粗 Baum-Connes 予想を証明した。その証明において、Gromov 積の類似概念が用いられた。一方、Higson コロナの連続像となるコンパクト距離空間を境界にもつコンパクト化を粗コンパクト化という。深谷友宏氏、尾國新一氏と共同研究を行い、次を得た：固有距離空間  $X$  に対して公理的な方法で  $X$  上の一般化された Gromov 積を定義し、一般化された  $X$  上の Gromov 積から  $X$  の粗コンパクト化が定義できること、及び、 $X$  の粗コンパクト化から一般化された  $X$  上の Gromov 積が定義できることを示した。さらに、(適切な同値関係による同値類を考えたときに)一般化された  $X$  上の Gromov 積全体と  $X$  の粗コンパクト化全体が1対1に対応することを証明した。本成果についてまとめた論文は、学術誌 Journal of Topology and Analysis に掲載された。

(3) 漸近的性質 C に関連する概念として、Radu (2010)による超限漸近次元と Dydak (2020)による漸近的性質 D がある。Orzechowski (2020)は定理「距離空間が漸近的性質 D を満たせば、その超限漸近次元は順序数  $\omega\omega$  未満である」(ここで  $\omega$  は最小の無限順序数を表す)を示し、問題「超限漸近次元が順序数  $\omega\omega$  満であり漸近的性質 D を満たさない距離空間は存在するか?」を提起した。本研究では Orzechowski の定理の逆が成り立つことを示し、上記問題を否定的に解決した。本成果をまとめた論文は、学術誌 Topology and its Applications に掲載された。

(4) 研究代表者(2017)は、内周の増大するグラフの列の粗非交和が漸近次元に関する遺伝的無限次元性を満たすことを示し、Dranishnikov の問題の反例の候補となり得ることを得た。その Higson コロナの被覆次元が有限であれば、反例となる。本研究において、Higson コロナの被覆次元の計算を試みたが、その計算はうまくいっていない。しかし、計算時に検討した超フィルターを用いて解析する方法が、半直線の Higson コロナの解析に利用できることに気付いた。岩本、友安(2001)は半直線の Higson コロナが分解不可能な連続体であることを証明した。本研究では、半直線の Higson コロナが、さらに以下の性質をもつことを証明した。連続体仮説の下で連続体濃度の compositants をもつ。どの非退化な部分連続体も遺伝的分解不可能でない。任意の空でない開集合は非退化かつ分解不可能な部分連続体を含む。本成果をまとめた論文は、学術

誌 Topology and its Applications に掲載された。

(5) 有限生成群の幾何学的研究において語距離は基本的である。局所コンパクトかつコンパクトな位相群に対してもこの種の距離が考えられるが、より一般の位相群について粗幾何学を展開する際には、群粗構造 (group coarse structure) と呼ばれる距離を粗幾何学的に抽象化した概念が必要となる。Rosendal (2021) は、それまでに知られていた粗構造に加え、位相群に対していくつかの群粗構造を導入した。群粗構造の研究は当初計画にはなかったが、2019 年に行った N. Zava 氏との研究打合せをきっかけに群粗構造の研究の方向性が得られた。D. Shakhmatov 氏、N. Zava 氏と共同研究を進めた結果、局所コンパクト可換群に対しては、距離空間への作用を用いて定義される左粗構造と、コンパクト部分集合を用いて定義される群コンパクト粗構造が一致することが分かった。現在、本結果と共に局所コンパクト群の群粗構造の関係について得られた成果を論文にまとめている。

(6) Guentner, Willett, Yu (2017) は離散群の局所コンパクトハウスドルフ空間への作用に対して力学漸近次元 (dynamic asymptotic dimension) を定義し、 $C^*$ 環の nuclear dimension へ応用した。力学漸近次元の値が分かっている作用の例は少なく、Willett の問題「与えられた作用の力学漸近次元が有限であれば、その値は作用する群の漸近次元と一致するか」は未解決である。本研究課題の開始時において研究代表者はこの問題を認識できていなかったが、2021 年の知念直紹氏との研究打合せで、力学漸近次元をはじめ群作用に対する次元に関する新たな知見を得ることができ、知念氏と共同研究を開始することになった。それより、いくつかの具体的な作用に対して Willett の問題が肯定的であることを確認した。より広い枠組みでも Willett の問題が肯定的となるかについて調べるのが今後の課題である。

(7) Bartels, Luck, Reich (2008) による双曲群に対する Farrell-Jones 予想の研究をきっかけに、同変漸近次元 (equivariant asymptotic dimension) と呼ばれる群作用に対する次元概念が知られている。Guentner, Willett, Yu (2017) は、離散群のコンパクト空間上の群作用に対し、その同変漸近次元の値は力学漸近次元の値以上であることを証明した。しかし、それ以上はよく分かっておらず、特に、力学漸近次元と同変漸近次元が本質的に異なるかどうかについて分かっていない。知念直紹氏と共同研究を行い、同変漸近次元に関する定理の精密化と定義の一般化を行った。これまで同変漸近次元はコンパクト空間上の作用に対してのみ定義・議論されていた。そのため、非コンパクトな空間上の群作用については、その空間の Stone-Čech コンパクト化へ群作用を拡張して、その作用の同変漸近次元を計算する必要があるがあった。今回得た成果により、非コンパクトな空間上の群作用に対しても、直接的に同変漸近次元の計算ができるようになった。ただし、今回の一般化が本質的に応用できる結果や具体例はまだなく、これらについて調べることが今後の課題である。

(8) 離散群  $G$  のコンパクト空間  $X$  への作用に対し、その同変漸近次元は、 $G$  と  $X$  の直積空間  $G \times X$  の開被覆を用いて定義される。Guentner, Willett, Yu (2017) は、 $X$  から  $G$  の作用する多面体  $K$  への "近似的に同変" な連続写像を用いて同変漸近次元を特徴付けた。しかし、その証明において定義された写像が "近似的に同変" であるかが不明確であった。知念直紹氏と共同研究を行い、与えられた開被覆の  $G$  作用に関する適切な代表元をとり、各代表元に対して適切に連続関数を定めることによって、"近似的に同変" であることが分かる連続写像を構成した。本成果について論文にまとめ、現在投稿中である。

(9) 有限生成群  $G$  のコンパクト距離空間  $X$  への作用の同変漸近次元が有限ならば、その値は  $G$  の漸近次元と  $G$  の被覆次元の和以下であることが Sawicki (2019) によって示された。また、階数 2 の自由群からコントロール集合への作用で同変漸近次元が無限となる例が最近 Bonicke (preprint, 2023) によって与えられた。任意の有限生成部分群が有限である群は局所有限群と呼ばれる。可算群が局所有限であることと漸近次元が 0 と等しいことは同値である (Smith (2006))。知念直紹氏と共同研究を行い、任意の局所有限群  $G$  のコンパクト空間  $X$  への作用の同変漸近次元は  $X$  の被覆次元以下であること、さらに正の整数  $n$  に対し、 $X$  の被覆次元が  $n$  で  $X$  が  $(n-1)$ -連結であれば、その作用の同変漸近次元は  $n$  と等しいことを得た。本成果について論文にまとめ、現在投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 4件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Fukaya Tomohiro, Oguni Shin-ichi, Yamauchi Takamitsu	4. 巻 14
2. 論文標題 Coarse compactifications and controlled products	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 875 ~ 900
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1142/s1793525321500102	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yamauchi Takamitsu	4. 巻 301
2. 論文標題 Connectedness properties of the Higson corona of the half line	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107542, 26pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107542	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Weighill Thomas, Yamauchi Takamitsu, Zava Nicolo	4. 巻 8
2. 論文標題 Coarse infinite-dimensionality of hyperspaces of finite subsets	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 335 ~ 355
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-021-00515-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Yamauchi Takamitsu	4. 巻 295
2. 論文標題 Transfinite asymptotic dimension and APD profiles	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107675, 7pp
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2021.107675	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計10件(うち招待講演 3件/うち国際学会 2件)

1. 発表者名 山内貴光
2. 発表標題 On a characterization of equivariant asymptotic dimension
3. 学会等名 2024 早稲田幾何学的トポロジー研究集会
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 山内貴光
2. 発表標題 非コンパクト空間上の作用に対する同変漸近次元
3. 学会等名 東北大学大学院理学研究科数学専攻 談話会(招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 山内貴光
2. 発表標題 On dynamic asymptotic dimension of Stone-Cech extensions of proper cocompact actions
3. 学会等名 2023年度ジェネラルトポロジーシンポジウム
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Takamitsu Yamauchi
2. 発表標題 Group coarse structures on locally compact abelian groups
3. 学会等名 Mini-symposium ``Topology and Applications'' in Mathematics Days in Sofia(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 山内貴光
2. 発表標題 有限集合からなる超空間の粗幾何学的無限次元性
3. 学会等名 RIMS 共同研究「集合論的および幾何学的トポロジーと関連分野への応用」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山内貴光
2. 発表標題 局所コンパクトアーベル群の群粗構造
3. 学会等名 2022 年度ジェネラルトポロジーシンポジウム
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 山内貴光
2. 発表標題 超限漸近次元について
3. 学会等名 RIMS共同研究「一般位相幾何学の動向と諸分野との連携」
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 山内貴光
2. 発表標題 粗コンパクト化とGromov 積の一般化
3. 学会等名 RIMS共同研究 (公開型)「一般位相幾何学の発展と諸分野との連携」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takamitsu Yamauchi
2. 発表標題 Connectedness properties of the Higson corona of the half line
3. 学会等名 The Third Pan-Pacific International Conference on Topology and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 山内貴光
2. 発表標題 半直線のHigson coronaの連結性について
3. 学会等名 2019年度ジェネラルトポロジーシンポジウム
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------