様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月　７ 日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４７０

研究課題名（和文）交代結び目の体積予想

研究課題名（英文）On the volume conjecture for alternating knots

研究代表者
横田　佳之（Yokota, Yoshiyuki）

東京都立大学・理学研究科・教授

研究者番号：４０２４０１９７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,500,000円

研究成果の概要（和文）：結び目の体積予想とは、結び目の色つきジョーンズ多項式の極限に、結び目補空間の単体的体積等が現れるという予想であり、ジョーンズ多項式に代表される量子不変量の幾何的背景の謎に迫る、重要な意味を持ちます。
この研究では、結び目の補空間の理想四面体分割を用いた結び目群の放物型表現の構成と四面体の退化パターンの分類、ポテンシャル関数のヘッセ行列式とノイマン・ザギエ行列との関係、理想四面体分割の角度空間上の、新しい実ポテンシャル関数の構成等の成果を得ましたが、予想の解決には至っていません。

研究成果の学術的意義や社会的意義
ジョーンズ多項式の発見以降、物理学を巻き込む形で、結び目・３次元多様体に対して導入され た様々な量子不変量は、ドリンフェルド・神保等による量子群の理論に立脚した極めて代数的なものであり、量子不変量の幾何学的な定式化の欠如は、過去４０年、研究者を悩ませてきたと同時に、量子不変量の本格的な幾何学への応用を妨げてきました。この問題に対する突破口になると期待されているのが結び目の体積予想であり、その研究は、すでに多くの副産物を産み出しています。今回の成果も、体積予想の証明だけでなく、結び目の半順序や、角度空間上の勾配流の研究等につながると期待しています。

研究成果の概要（英文）：The volume conjecture for knots states that, for a knot in 3-sphere, the simplicial volume of its complement appears in the limit of its colored Jones polynomial, which is very important because the geometric background of quantum invariants such as Jones polynomials is still unclear.
In this research, by using ideal triangulations of knot complements, we establish an effective method to compute the parabolic representations of knot groups, the relationship between the Neumann-Zagier matrices and hessians of the potential functions related to the colored Jones polynomials, and a new potential functions defined on angle spaces of tetrahedra. However, we can not prove the volume conjecture for alternating knots yet.

研究分野：位相幾何学

キーワード：交代結び目　ジョーンズ多項式　体積予想

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

結び目・３次元多様体の理論は、双曲幾何学の導入やジョーンズ多項式の発見をきっかけに大きく発展し、現代の位相幾何学における中心テーマのひとつとなっています。

さらに、ジョーンズ多項式の発見以降、物理学を巻き込む形で、結び目・３次元多様体に対して導入された様々な不変量（いわゆる量子不変量）は、ドリンフェルド・神保等による量子群の理論に立脚した極めて代数的なものであり、量子不変量の幾何学的な定式化の欠如は、過去４０年に渡り研究者を悩ませてきたと同時に、量子不変量の本格的な幾何学への応用を妨げてきました。

この問題に対する突破口になると期待されているのが結び目の体積予想であり、 その研究は、重要かつ基本的な幾何学的不変量である双曲体積、チャーン・サイモンズ不変量、ライデマイスター・トーションに関する簡明な公式等、すでに多くの副産物を産み出しています。

さて、結び目の体積予想とは、結び目の色つきジョーンズ多項式の極限に、結び目のグロモフ体積、チャーン・サイモンズ不変量、ライデマイスター・トーション等が現れるという予想であり、３次元多様体の幾何構造と量子不変量を結びつける重要な研究テーマとして、四半世紀に渡り研究者の注目を集めてきました。

解析的な観点では、研究開始の数年前、ジュネーブ大学のカシャエフ氏との共同研究、および京都大学の大槻氏により、５交点の結び目に対する体積予想が解決されたことをきっかけに、６交点の結び目に対しては京都大学の大槻氏との共同研究で、７交点の結び目に対しては京都大学の大槻氏の単独研究で体積予想が解決され、色つきジョーンズ多項式の積分表示と鞍点法による評価方法が確立されたと言えます。

幾何的な観点では、色つきジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数の性質の解明が進むと同時に、研究開始の直前、広島大学の作間氏との共同研究により、体積予想の研究で用いる理想四面体分割から、交代結び目の補空間のキューブ分解（非正曲率構造）が構成され、理想四面体分割の非退化性が証明されていました。

色つきジョーンズ多項式の積分表示と鞍点法による評価方法の確立と、理想四面体分割の非退化性の保証により、交代結び目に対しては、体積予想解決への技術的な見通しが立ち始めていました。少なくとも、ツイスト結び目や二橋結び目等、交代結び目の無限族に対する予想の証明が視野に入ったと言えます。

また、交代結び目の補空間のキューブ分解（非正曲率構造）については、結び目・３次元多様体論へのさらなる応用が期待されるだけでなく、このテーマを応用例の一つに加えた結び目の体積予想の可能性が、改めて認識されました。

２．研究の目的

本研究の目的は、個別の結び目に対する議論に区切りをつけ、結び目の最も重要なクラスであり、双曲幾何学とジョーンズ多項式の双方に相性がよい交代結び目に対して、色つきジョーンズ多項式の積分表示に現れる主要項等の漸近挙動を正確に計算し、一般の結び目に対する体積予想解決の突破口とすることです。

具体的には、交代結び目の補空間のキューブ分解（非正曲率構造）から完備双曲構造への変形を、理想四面体分割を通じて詳しく解析することで、色つきジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数に鞍点法を適用する際に問題となる、適切な積分路の設定と適切な臨界点までの変形等の技術的な問題点をクリアできると考えました。

また、積分路の候補を与えるポテンシャル関数の組合せ的な情報と、交代結び目の補空間のキューブ分解（非正曲率構造）は、ともに交代結び目の交代図式から得られるものであり、それらから双曲構造を再構成することは、交代結び目の双曲構造と交代図式の間の強い相関性を示す結果であり、重要な意味を持ちます。

サーストンによる双曲幾何学の導入と、ジョーンズによる量子不変量の発見を、統一するような成果を目標としています。

３．研究の方法

交代結び目の補空間のキューブ分解（非正曲率構造）から完備双曲構造への変形を把握するため、９交点までの交代結び目に対し、放物型表現と呼ばれる、基本群から２次特殊線形群への準同型写像と、色つきジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数の臨界点をリストアップし、比較しました。

具体的には、結び目の図式から定まる理想四面体分割から、個々の四面体が退化する場合も考慮しつつ、ホロノミー表現を網羅的に構成し、同じ図式から定まるポテンシャル関数の臨界点と比較しました。計算量が計算機の能力を超える可能性がありましたが、９交点までの結び目の基本群の生成元が高々３個であることを利用することで、最大３個のパラメータによるホロノミー表現を構成することでクリアしました。

また、交代結び目の補空間のキューブ分解（非正曲率構造）の変形の受け皿とするため、補空間の四面体の面角を変数とする角度空間上の実ポテンシャル関数を導入し、従来のポテンシャル関数の理論との統一を模索しました。

具体的には、結び目の図式の各交点・各領域に対応するパラメータを導入し、図式の各コーナーに対応するロバチェフスキー関数の和として、実ポテンシャル関数を構成しました。色つきジョーンズ多項式の積分表示に現れるポテンシャル関数は、結び目の図式の各辺に対応するパラメータで記述されることから、相互補完する関係にあると考えられます。２つのポテンシャル関数の統一と、拡張された定義域の中で、積分路の自然な変形を模索しました。

さらに、ポテンシャル関数のヘッセ行列式に注目した積分路の設定も模索しました。

４．研究成果

交点数が９以下の交代結び目の放物型表現とポテンシャル関数の臨界点の比較については、理想四面体分割を用いて放物型表現を効率的に求める方法を開発し、完備双曲構造以外の放物型表現に対応する理想四面体の退化のパターンを分類しましたが、キューブ分解から完備双曲構造を含む放物型表現に対応する理想四面体分割への変形の一般論は、未だ実現できていません。

ただし、本研究の副産物として、四面体が退化する放物型表現は、他の結び目の幾何構造と結びついており、結び目の半順序、すなわち結び目群間の全射準同型の研究への応用等が期待できるだけでなく、より精密な構造を解析。

また、交代結び目の補空間の理想四面体分割の角度空間については、結び目の図式を利用した効率的なパラメータ表示を発見し、ロバチェフスキー関数の和で表される実ポテンシャル関数の臨界値が双曲体積と一致することを証明しました。

その他の臨界値が放物型表現の体積に対応すること、交代結び目の図式に由来する従来のポテンシャル関数と実ポテンシャル関数のパラメータ空間の統合、実ポテンシャル関数の勾配流が誘導する積分路の変形の記述を完了できなかったことが残念ですが、今後の課題とします。

ポテンシャル関数のヘッセ行列式に注目した積分路の設定に関しては、ポテンシャル関数のヘッセ行列式が、理想四面体分割の組合せ的な情報から得られるノイマン・ザギエ行列と、各理想四面体のシェイプ・パラメータを並べた対角行列で記述できることを示し、全ての理想四面体が正の向きを持つ場合には、鞍点法が適用できることを確認しました。

負の向きを持つ理想四面体が存在する場合の処理、ヘッセ行列式が正となるようなポテンシャル関数の各変数の実部の集合の具体的な記述を完了できなかったことが残念ですが、今後の課題とします。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計1件（うち招待講演　1件／うち国際学会　0件）

１．発表者名 横田佳之
２．発表標題 On Neumann-Zagier matrices and generalized angle structures for hyperbolic knots
３．学会等名 Low dimensional topology and number theory XIII（招待講演）
４．発表年 2022年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関