

令和 6 年 6 月 9 日現在

機関番号：22604

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03471

研究課題名(和文)非正曲率空間の粗幾何学の新展開

研究課題名(英文)New development of the coarse geometry of nonpositively curved spaces

研究代表者

深谷 友宏 (Fukaya, Tomohiro)

東京都立大学・理学研究科・准教授

研究者番号：40583456

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：単連結完備負曲率リーマン多様体の粗幾何学における類似物が、Gromov双曲空間であり、これまで幾何学的群論や非可換幾何学の観点から数多の研究が為されてきた。近年、負曲率を非正曲率に置き換えた、様々な距離空間のクラスが活発に研究されている。尾國新一氏との共同研究で2017年に導入した粗凸空間はそうした空間の多くを包含する非正曲率空間のクラスである。以前の研究では粗凸空間に対して、非可換幾何学における主要な問題の一つである、粗 Baum-Connes 予想が成立することを、必要最小限の準備の元で示した。そこで本研究では、改めて粗凸空間の基礎理論の構築を行った。特に境界にまつわる諸概念を整備した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

単連結完備負曲率リーマン多様体の粗幾何学における類似物が、Gromov双曲空間であり、これまで幾何学的群論や非可換幾何学の観点から数多の研究が為されてきた。近年、「負曲率」を「非正曲率」に置き換えた、様々な距離空間のクラスが活発に研究されている。尾國新一氏との共同研究で2017年に導入した粗凸空間、はそうした空間の多くを包含する非正曲率空間のクラスである。これまで、Gromov双曲空間、CAT(0)空間、systolic 複体、injective metric spacesなど、個別の設定で行われてきた「非正曲率距離空間」の研究を、粗凸空間という設定の元で、統一的な理論の構築を進められた。

研究成果の概要(英文)：Gromov hyperbolic spaces are analogous to simply connected Riemannian manifolds of negative curvature, and there are many studies from the viewpoint of geometric group theory and noncommutative geometry. Recently, studies of "spaces of nonpositive curvatures" become very active. With Shin-ichi Oguni, we introduced "coarsely convex spaces", which include many spaces of nonpositive curvatures, like Gromov hyperbolic spaces, CAT(0) spaces, systolic complexes, and proper injective metric spaces. In 2017, We proved the coarse Baum-Connes conjecture for proper coarsely convex spaces with minimal knowledge of these spaces. In this project, we reconstructed the basic theory of coarsely convex spaces.

研究分野：幾何学的群論

キーワード：粗幾何学 粗凸空間 粗Baum-Connes予想 非正曲率空間

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

近年、多様体の範疇を超えた空間の幾何学が活発に研究されている。その一つである**粗幾何学 (coarse geometry)** は、空間を遠くから眺めたときに見えて来る、粗い構造に着目した研究である。例えば整数 \mathbb{Z} と実数 \mathbb{R} は局所的には全く異なる構造を持つが、両者を遠くから眺めてみれば、どちらも直線という同じ幾何構造が見えて来る。このような幾何学を考える動機として、幾何学的群論と非可換幾何学がある。

単連結完備負曲率リーマン多様体の粗幾何学における類似物が、Gromov 双曲空間であり、これまで幾何学的群論や非可換幾何学の観点から数多の研究が為されてきた。近年、「負曲率」を「非正曲率」に置き換えた、様々な距離空間のクラスが活発に研究されている。特に、CAT(0) 空間、Systolic 複体、injective metric space、Helly グラフなどがある。これらは共通した幾何学的性質を持つが、それぞれ個別に研究されてきた。

一方で、距離空間の「粗 K-ホモロジー」と、距離空間から作られた Roe-代数と呼ばれる C^* -環の K 理論との同型を主張する**粗 Baum-Connes 予想**は、非可換幾何学における主要な研究対象の一つである。

2. 研究の目的

尾國新一氏との共同研究 ([5]) で 2017 年に導入した**粗凸空間**は、上述の空間をすべて包含する非正曲率空間のクラスである。粗凸空間の観点から、非正曲率をもつ距離空間の幾何学的な性質を探究する。また、粗 Baum-Connes 予想に関連する非可換幾何学への応用を目指す。

3. 研究の方法

粗凸空間の幾何学的な性質は、その境界の位相的な性質に反映されている。境界はコンパクト距離化可能空間であり、その研究に位相幾何学の手法を用いることができる。例えば粗凸空間の Roe 代数の K 群は、境界の K ホモロジーによって計算することができる。

4. 研究成果

尾國新一氏、及び山内貴光氏との共同研究では、粗凸空間の境界の構成を抽象化して、一般化された Gromov 積に関して発散する点列からなる、Gromov 境界の一般化を行った [6]。応用として、粗凸空間の境界に関して、擬測地線を用いた構成と、点列を用いた構成が同値であることが示された。

江澤悠平氏との共同研究では、粗凸空間の間の写像が境界の間の写像を誘導するための条件を考察した。応用として、粗凸空間の間の粗 n 対 1 写像が、境界の間の n 対 1 写像を誘導することを示した [1]。これは Gromov 双曲空間の間の写像に関して知られている結果の拡張である。また、境界の間の連続写像から、粗凸空間の間の写像を構成する手法も与えた。

松家拓稔氏との共同研究では、測地的粗凸空間の自由積を構成し、それが測地的粗凸空間になることを示した [2]。最終年度は、測地的粗凸空間の自由積の境界の位相構造の研究を行った。測地的粗凸空間の自由積の境界のホモロジーが、各因子の境界のホモロジーと、Cantor 空間のホモロジーを用いて完全に記述できることを示した。前年度の測地的粗凸空間の自由積に対する粗 Baum-Connes 予想の結果を組み合わせて、測地的粗凸空間の自由積の Roe 代数の K 群を、各因子の Roe 代数の K 群と、Cantor 空間の K-ホモロジーを用いて記述することができた。また応用として、境界の位相次元に関する公式を得た [3]。

Eduardo Martínez-Pedroza 氏及び松家拓稔氏との共同研究では、相対的粗凸群という群のクラスを定義し、このクラスが融合積や HNN 拡大の元でどのように振る舞うか解析した [4]。

一連の研究を通して、粗幾何学の意味で非正曲率を持つ空間のクラスを広げ、粗 Baum-Connes 予想をはじめとする非可換幾何学の諸問題への応用が得られた。

参考文献

- [1] Yuuhei Ezawa and Tomohiro Fukaya. Visual maps between coarsely convex spaces. *Kobe J. Math.*, 40(1-2):7–45, 2023.
- [2] Tomohiro Fukaya and Takumi Matsuka. Free products of coarsely convex spaces and the coarse Baum-Connes conjecture. *arXiv:2303.13701, to appear in Kyoto J. Math*, 2023.
- [3] Tomohiro Fukaya and Takumi Matsuka. Boundary of free products of metric spaces. *arXiv preprint arXiv:2402.06862*, 2024.
- [4] Tomohiro Fukaya, Takumi Matsuka, and Eduardo Martínez-Pedroza. Geodesic coarsely convex group pair. *in preparation*.
- [5] Tomohiro Fukaya and Shin-ichi Oguni. A coarse Cartan–Hadamard theorem with application to the coarse Baum–Connes conjecture. *J. Topol. Anal.*, 12(3):857–895, 2020.
- [6] Tomohiro Fukaya, Shin-ichi Oguni, and Takamitsu Yamauchi. Coarse compactifications and controlled products. *J. Topol. Anal.*, 14(4):875–900, 2022.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Fukaya Tomohiro, Oguni Shin-ichi, Yamauchi Takamitsu	4. 巻 14
2. 論文標題 Coarse compactifications and controlled products	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Topology and Analysis	6. 最初と最後の頁 875 ~ 900
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S1793525321500102	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yuuhei Ezawa, Tomohiro Fukaya	4. 巻 -
2. 論文標題 Visual maps between coarsely convex spaces	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 arXiv	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 FUKAYA Tomohiro	4. 巻 76
2. 論文標題 A topological product decomposition of Busemann space	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2969/jmsj/89738973	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件（うち招待講演 1件/うち国際学会 1件）

1. 発表者名 深谷友宏
2. 発表標題 Busemann空間の位相的分解
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会・幾何学分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 深谷友宏
2. 発表標題 Visual maps between coarsely convex spaces
3. 学会等名 集合論的および幾何学的トポロジーと関連分野への応用
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Tomohiro Fukaya
2. 発表標題 Visual maps between coarsely convex spaces
3. 学会等名 Geometric Group Theory in East Asia (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 深谷友宏
2. 発表標題 粗凸空間に作用する群の例
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会・幾何学分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 深谷友宏
2. 発表標題 粗幾何学入門1,2
3. 学会等名 阿蘇幾何学研究集会
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 深谷友宏	4. 発行年 2019年
2. 出版社 サイエンス社	5. 総ページ数 200
3. 書名 粗幾何学入門	

〔産業財産権〕

〔その他〕

https://www.comp.tmu.ac.jp/tomohirofukaya/index.shtml

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
カナダ	Memorial University of Newfoundland			