

令和 5 年 6 月 1 日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03476

研究課題名（和文）結び目の諸構造とカンドルコサイクル不変量

研究課題名（英文）Structures of knots and quandle cocycle invariants

研究代表者

井上 歩（Inoue, Ayumu）

津田塾大学・学芸学部・准教授

研究者番号：10610149

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 1,800,000円

研究成果の概要（和文）：結び目理論とは、絡み合った紐（結び目）を分類する学問である。結び目には、各々を特徴付ける、様々な構造が備わっている。カンドルコサイクル不変量は、結び目の分類に有用な代数的な量である。カンドルコサイクル不変量は、経験的に、結び目の構造をよく反映することが知られている。そこで、カンドルコサイクル不変量が結び目の諸構造を捉える仕組みを解き明かすことを目標として、本研究を実施した。その成果として、特に、結び目が備える「ファイバー構造」、「ツイストスピニング構造」、「ザイフェルト曲面の構造」とカンドルコサイクル不変量との関係性を明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

紐状の物質の絡まりは、例えば高分子や DNA など、自然界に多く存在する。その絡まりが備える「構造」を理解することは、物性や現象を理解する上においても、非常に重要である。本研究を通じて結び目が備える構造に対する理解が進んだことは、結び目理論の発展のみならず、科学全般の進展においても意義があると言える。

研究成果の概要（英文）：In mathematics, a knot means a knotted circle in the 3-dimensional space. A quandle is an algebraic system. For each quandle and each knot, we have quandle cocycle invariants of the knot, which are algebraic quantities for the knot. Each knot is equipped with various kinds of structures, which characterize the knot. It is known experientially that quandle cocycle invariants of a knot detect several structures of the knot. The aim of this research is to investigate how or why quandle cocycle invariants detect structures of a knot. In accordance with this program, the researcher respectively figures out a relationship between a quandle cocycle invariant and "fiber structure", "twist-spinning structure" or "Seifert surface structure" of a knot.

研究分野：幾何学

キーワード：結び目 カンドル ファイバー結び目 正多胞体 ザイフェルト曲面 空間グラフ

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

カンドルコサイクル不変量は、結び目の同値類が備える様々な「構造」を捉える、優秀な不変量である。しかし、

- ・なぜカンドルコサイクル不変量は「構造」を捉えるのか？
- ・目標の「構造」を捉えるためには、どのカンドルコサイクル不変量を用いれば良いのか？

という根本的かつ重要な「問い」に答えるような先行研究は少ないように思われた。そこで、結び目の同値類が備える種々の「構造」とカンドルコサイクル不変量との関係性を解き明かすという本研究に取り組むことにした。

2. 研究の目的

(1) ファイバー結び目と呼ばれる結び目の補空間に定まる「ファイバー構造」とカンドルコサイクル不変量との関係性に着目し、これを用いて結び目の分類を行う

(2) ツイストスピニングという方法で構成される結び目が備える「ツイストスピン構造」とカンドルコサイクル不変量との関係性に着目し、これを用いてカンドルホモロジーに対する理解を深める

(3) 結び目に対して定まる「ザイフェルト曲面の構造」とカンドルコサイクル不変量との関係性を解き明かす

3. 研究の方法

(1) 研究代表者の先行研究(若手研究(B) 16K17591)により、ファイバー結び目については、その結び目カンドル()がファイバーの基本群とそのモノドロミーを用いて記述できることが分かっている(:カンドルコサイクル不変量の根幹に関わるカンドル)。また、ツイストスピニングで構成される結び目は、すべてファイバー結び目であることが知られている。そこで、結び目カンドルが捉える「ファイバー構造」を活用して、ツイストスピニングで構成される結び目に分類を与える。

(2) 研究代表者の先行研究(若手研究(B) 16K17591)により、三葉結び目の3・4・5ツイストスピニングの結び目カンドルは、それぞれ、 $16 \cdot 24 \cdot 600$ 胞体の回転対称性が定めるカンドル($16 \cdot 24 \cdot 600$ 胞体カンドルと名付けた)と同型であることが分かっている。またさらに、三葉結び目のnツイストスピニングは、各頂点にn個の正三角形が集まるようなタイル貼りの回転対称性が定めるカンドルにより彩色()できることも分かっている(:カンドルコサイクル不変量を計算するために必要なもの)。そこで、三葉結び目の「ツイストスピニング構造」を通して、これら2種類のカンドルの間に代数的な関係性を見出す。

(3) 結び目に対して「ザイフェルト曲面の構造」は一意には定まらないが、あるものについてはザイフェルトのアルゴリズムと呼ばれる方法により構成することができる。このアルゴリズムは、結び目の図式に現れる各交点に付随してある操作を行うものである。一方で、カンドルコサイクル不変量も、図式の各交点において重みを数え上げることで定まるものである。そこで、これらの仕組みに着目して、カンドルコサイクル不変量と「ザイフェルト曲面の構造」に関係性を見出す。

4. 研究成果

(1) ツイストスピニングで構成される2次元結び目の結び目カンドルに対して、これが有限となるための必要十分条件を与えた。また、その応用として、結び目カンドルは一致するが、互いに異なる任意有限個の2次元結び目の例を与えた。先行研究およびこの結果の内容は、雑誌論文として出版するとともに、いくつかの学会等で講演した。

(2) 三葉結び目のnツイストスピニングの結び目カンドルが、各頂点にn個の正三角形が集ま

るようなタイル貼りの回転対称性が定めるカンドルのアーベル被覆であることを示した。先行研究およびこの結果の内容は、雑誌論文として出版が決まっている。また、いくつかの学会等でも講演を行った。

(3)カンドルの鎖複体から群の鎖複体への鎖写像を構成し、この写像を通して、カンドルコサイクル不変量と「ザイフェルト曲面の構造」との関係性が記述できることを発見した。今後は、この関係性の応用について研究を進め、その成果を論文として発表し、また学会等で講演する予定である。

また(3)の研究の過程から、次の結果も得た。

(4)空間内の曲面に対する「改変」という操作を導入し、同じ結び目に対する異なる2つのザイフェルト曲面が、一度の「改変」により必ず互いに移り合うことを示した。この結果の内容は、雑誌論文として出版するために、現在執筆中である。また、いくつかの学会等で講演を行った。

さらに、次の結果も得た。

(5)(木村直記氏・谷山公規氏・新國亮氏との共同研究)有限グラフを平面にはめ込んだときに現れる交点数や回転数の総和について、有限グラフのサイクルの集合を指定すると、特定の関係式が満たされることを示した。その応用として、ルジャンドリアン空間グラフと呼ばれる対象に関するいくつかの性質を明らかにした。またペテルセングラフとヒーウッドグラフに対して、特に関係式を詳細に研究し、いくつかの性質を明らかにした。この結果の内容は、雑誌論文として出版した。また、共著者が、いくつかの学会等で講演した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Ayumu Inoue	4. 巻 265
2. 論文標題 On the knot quandle of a fibered knot, finiteness and equivalence of knot quandles	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 106811-1--8
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.topol.2019.07.005	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ayumu Inoue, Naoki Kimura, Ryo Nikkuni, and Kouki Taniyama	4. 巻 31
2. 論文標題 Crossing numbers and rotation numbers of cycles in a plane immersed graph	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Journal of Knot Theory and Its Ramifications	6. 最初と最後の頁 2250076-1--26
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1142/S0218216522500766	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ayumu Inoue	4. 巻 60
2. 論文標題 The knot quandle of the twist-spun trefoil is a central extension of a Schläfli quandle	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Osaka Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計9件（うち招待講演 4件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 井上 歩
2. 発表標題 Alteration of Seifert surfaces
3. 学会等名 Geometry in low dimensions 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 井上 歩
2. 発表標題 ザイフェルト曲面の改変について
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 井上 歩
2. 発表標題 A survey of a method to obtain an aimed minimal Seifert surface from each canonical Seifert surface
3. 学会等名 拡大 K00K セミナー 2022
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 井上 歩
2. 発表標題 Quandle 理論入門（対称性を記述する言語として）
3. 学会等名 大阪公立大学数学研究所談話会（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 井上 歩
2. 発表標題 結び目に付随する代数系「カンドル」と対称性
3. 学会等名 非線形波動から可積分系へ（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 井上 歩
2. 発表標題 正多胞体が定めるカンドルについて
3. 学会等名 カンドルと対称空間 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Ayumu Inoue
2. 発表標題 The twist-spinning of classical knots whose knot quandles are finite
3. 学会等名 Knots in Tsushima 2019 (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Ayumu Inoue
2. 発表標題 The fibered knots whose knot quandles are finite
3. 学会等名 The 15th East Asian Conference on Geometric Topology (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 井上 歩
2. 発表標題 三葉結び目を分岐集合とする3次元球面の有限巡回分岐被覆空間の三角形分割
3. 学会等名 2019年度琉球結び目セミナー
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------