

令和 6 年 6 月 20 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2023

課題番号：19K03477

研究課題名(和文) 非安定域を中心とする自由群の自己同型群のコホモロジーに関連する研究

研究課題名(英文) Study on cohomologies of automorphism groups of free groups focused on the unstable range

研究代表者

佐藤 隆夫 (Sato, Takao)

東京理科大学・理学部第二部数学科・教授

研究者番号：70533256

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、特に非安定域に焦点を置いて自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーに関する研究を行った。主に得られた結果としては、階数が3の場合に自由群のアーベル化の外部積を係数とするねじれ係数コホモロジー群を計算し、2次元コホモロジー群において安定域の場合と比べてある種の退化が起こっていることが分かった。また、自由群の自己同型群を、自由群の verbal 部分群のアーベル化に作用させた場合のコホモロジー群の計算を行った。先行研究などから、1次元のコホモロジーには2つの一次独立な森田コサイクルが存在するが、特に自由群の階数が2の場合にはこれら以外にも一次独立なコサイクルが存在することが確かめられた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

この半世紀の間に自由群の自己同型群のコホモロジーに関する研究は急速に進展を遂げており、安定域に関しては自由群のアーベル化を経由するようなねじれ係数コホモロジーの計算方法が確立されている。一方で、非安定域のねじれ係数コホモロジー群の構造については体系的な研究手法は未だ確立しておらず、具体的な計算結果を蓄積してその振る舞いを調べていくしかないのが現状である。本研究において、自由群の階数が3の場合の計算結果や、自由群のアーベル化を経由しないような係数のコホモロジー群についていくつかの新しい結果が得られたことは一定の学術的意義があると考えている。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied twisted cohomology groups of the automorphism groups of free groups on the unstable range. We computed all the cohomology groups with coefficients in the exterior products of the abelianization of the free group in the case where the rank of the free group is three. In particular, we verified that a certain degeneration is happen in some second cohomology groups, compare to those in the stable range. We also studied the first cohomology groups with coefficients in the abelianization of a certain verbal subgroup of the free group. From our previous works, it is easily seen that there are two linearly independent cohomology classes constructed from the Morita cocycles. By our computation, we verified that in the case where the rank of the free group is two, the rank of the first cohomology group is more than two in general.

研究分野：代数的位相幾何学

キーワード：自由群の自己同型群 群のコホモロジー ジョンソン準同型

## 1. 研究開始当初の背景

2000年代前半に Galatius による高度なホモトピー論を用いた手法によって自由群の自己同型群の自明係数安定ホモロジー群が決定されて以来、自由群の自己同型群の(コ)ホモロジー群に関する国内外の研究動向は、非安定域における(コ)ホモロジー群のふるまい、もしくは自由群のアーベル化への作用が定める標準的な表現の有理表現を主とするねじれ係数(コ)ホモロジーに移行してきた。有理自明係数非安定(コ)ホモロジーについては、森田茂之、Conant, Hatcher, Kassabov, Vogtmann らにより(コ)ホモロジー類の構成法がいくつか与えられ、その非自明性の研究が盛んにおこなわれていた。ねじれ係数(コ)ホモロジーの場合についても、Djament, Vespa, Randall-Williams, Wahl らによって、圏論や表現論を用いた手法により、安定(コ)ホモロジーの種々の計算法がいくつか独立に確立されてきた。しかしながら、自由群の自己同型群の非安定(コ)ホモロジーに関しては、有理自明係数の場合でも散在的に非自明になるなどのミステリアスな現象が出現し、Conant-Kassabov-Vogtmann らによって体系的な研究が進みつつあるも、その全貌は依然として未解明であった。さらに、ねじれ係数の場合に至っては殆ど手つかずの状態であり、計算結果と呼べるものもほとんど知られていなかった。

## 2. 研究の目的

本研究の究極的な目的は、特に非安定域を中心として、自由群の自己同型群のねじれ係数有理(コ)ホモロジー群の構造を完全に決定し、非自明なコホモロジー類の代数的ないしは幾何学的意味づけを与えることである。そのためにいくつかの問いを設定した。その主なものの一つに、自由群の IA 自己同型群の自明係数(コ)ホモロジー群と、自由群の自己同型群のねじれ係数(コ)ホモロジー群の関係の解明というものがある。自由群のアーベル化に自明に作用する自由群の自己同型たちのなす群を、自由群の IA 自己同型群という。群の拡大のスペクトル系列を考えることで、IA 自己同型群の自明係数(コ)ホモロジーと、自由群の自己同型群のねじれ係数(コ)ホモロジーとは密接に関係している。1次元(コ)ホモロジーの構造についての相互関係は、研究代表者の先行研究で完全に解明されており、次のステップとして2次元(コ)ホモロジーの様子、特に、IA 自己同型群の1次元コホモロジー群のカップ積との関係を詳しく調べることが重要であると考えられた。特に、研究代表者によって構成された非自明なコホモロジー類がいくつかあり、それらが生成元となるかを調べる。また、研究が進展するようであれば高次元の(コ)ホモロジー群の様子も研究したい。さらに、余裕があれば、自由群の  $SL(2, \mathbb{C})$  指標環のあるイデアル降下列の次数商への作用のような、自由群のアーベル化を経由しないような自由群の自己同型群の作用に関するねじれ係数(コ)ホモロジー群に関してもその構造、特にホモロジー安定性などについて明らかにしたいと考えていた。

## 3. 研究の方法

自由群の自己同型群のねじれ係数(コ)ホモロジーに関しては、研究代表者による先行研究で1, 2次元の場合の計算結果があるが、これは組合せ群論を用いた直截的計算によるもので、高次元の計算を行うには甚だ適さない。そこで、本研究では Culler-Vogtmann らによって導入された Outer space を用いる。これは曲面の写像類群の Teichmüller 空間に相当するもので、自由群の自己同型群の(コ)ホモロジーを幾何学的手法で算出するための道具である。特に、階数が3の場合は整係数(コ)ホモロジーに関しては Brady の計算結果が知られているので、それを有理ねじれ係数の場合で考察すれば計算は原理的に可能であると思われ、この方法を用いていくつかの(コ)ホモロジーの計算を試みる。特に、係数としては自由群のアーベル化の外積や  $SL(2, \mathbb{C})$  指標環の次数商として現れるようなものを中心に結果を積み上げる。

また、IA 自己同型群の整係数コホモロジーに関しては、Pettet によって、2次元コホモロジーにおける1次元のコホモロジーのカップ積の像が決定されているが、これを高次元に一般化するのは重要な問題である。そこで、GL 表現論等を用いて、自由群の自己同型群のねじれ係数コホモロジーが非自明となるような既約成分を同定し、これまでに得られている2次元の場合の手法等を踏襲して、生成元となりうるコサイクルたちを具体的に構成したい。研究が進めば、Djament, Vespa らの Functor homology の理論を用いてねじれ係数の場合の安定性などの研究を進めたいと考えている。(研究開始当初は、この IA 自己同型群の(コ)ホモロジーに関する問題は未解決であったが、現在では E. Lindell と片田舞の独立した一連の研究結果により、完全に解決されている。)

#### 4. 研究成果

まずは階数が3の場合に、上述したいくつかの係数の場合にねじれ係数(コ)ホモロジーの計算を行った。階数が3の場合であってもねじれ係数の場合は想定以上に計算量が多く、計算ミスを訂正しながらの作業となり多くの時間を要してしましたが、特に、自由群のアーベル化の外積を係数とする場合にすべて次元のコホモロジー群が決定できた。これにより、新たな非安定非自明コホモロジー類は得られたわけではないが、特に、階数が3の場合はある種の退化現象が起きていることが確認できたことは有意義であった。これらの結果は論文にまとめて投稿し、現在は受理され出版予定である。この手法を階数4以上の場合に一般化できないか考察しているが、階数が1つでも上がるとOuter spaceのセルの数が極端に増えてしまい計算量が爆発的に増大するので、計算機などの積極的な利用を検討中である。

IA自己同型群の整係数1次元コホモロジーのカップ積の構造については、表現論などを駆使して計算を進めてみたが本研究課題の手法では大きな進展が得られるほどには至らなかった。その最中の2022年頃、上述のようにLindellと片田舞の独立した一連の研究結果により、この問題は完全に解決された。すなわち、IA自己同型群のアーベル化準同型から誘導される整係数コホモロジー群の間の準同型写像の像はすべての次元で完全に決定された。特に、片田氏の計算によって、研究代表者が以前に構成した、自由群の自己同型群のある種のねじれ係数2次元コホモロジー類たちが生成元となっていることも確認され、図らずも本問題に一定の決着が着いた形となった。

一方、ねじれ係数コホモロジーの計算については、自由群の $SL(2, \mathbb{C})$ 指標環から定まるある加群に対しても行った。具体的には、自由群の $SL(2, \mathbb{C})$ 指標多様体の自明表現に対応する点の極大イデアルが定めるイデアル降下列の次数商たちを係数とするような、自由群の自己同型群のコホモロジーに関して、階数が3の場合にOuter spaceを用いて計算し、いくつかの結果は得られたが、本研究課題期間中に非自明なコホモロジー類が得られるまでには至らなかった。特に、Johnson準同型の理論との比較という意味では、これらの双対やテンソル積を係数とするコホモロジー群に大変興味があり、自由群のアーベル化の外積などと比べると表現の次元が著しく大きく、階数が3の場合に限っても計算が完遂しなかったものも多かった。これらは今後の課題でもあるが、この問題に関しては、本研究課題の後に採択された別の研究課題でも継続的に取り組んでおり、最近、大学院生の加藤瑤氏との計算機を用いた共同研究により計算が進み、階数が3の場合に非自明なコホモロジー類がいくつも現れることが分かり、現在精力的に研究中である。

本研究課題の主なテーマである、自由群の自己同型群の非安定ねじれ係数(コ)ホモロジーの研究内容や手法は、自由群のアーベル化を経由するような表現に限らなければならない理由はなく、むしろそれ以外の表現に対しても全く同様に考察ができる。上述の、自由群の $SL(2, \mathbb{C})$ 指標多様体の座標環から定まる加群もまさにその一例であるが、研究代表者がかつて研究していた自由群のある種のverbal部分群のアーベル化への作用が定める表現に対して、本研究課題の手法や方針を元に考察した結果、いくつかの新しい結果が得られた。特に、森田茂之によってMagnus表現を用いて構成された、自由群の自己同型群の森田コサイクルを用いて、2つの一次独立な1次元コホモロジー類が得られることは比較的容易に分かるが、自由群の階数が2の場合で、係数のverbal部分群をいくつか変えた場合に、それら以外にも非自明なコホモロジー類が存在することがスペクトル系列等を用いた具体的な計算により分かった。現在は一般の階数の場合や、表現加群の構造についての研究を精力的に進め、理論的に体系化できないか研究中有である。また、この研究の応用として、自由群の導来商へ自明に作用する自由群の自己同型たちのなす群が有限生成でないという副次的な結果も得られ、現在、論文執筆中である。

本研究では、計算の複雑さ等から進捗が当初より遅れてしまったことは否めないが、研究分野、内容は現在、国内外でも盛んに研究されているものであり、本研究で得られた成果はどれも他に類を見ない独自性の強いものである。本研究が当該分野の研究者に一定のインパクトと興味関心を与えるものと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計0件

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 4件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On twisted unstable cohomologies of automorphism groups of free groups
3. 学会等名 RIMS研究集会「変換群論の新展開」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On the $\text{Aut } F_n$ -actions on the fibers of free group covers of the products of cyclic groups
3. 学会等名 代数的位相幾何学の軌跡と展望（招待講演）
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Takao Satoh
2. 発表標題 On twisted unstable cohomologies of automorphism groups of free groups
3. 学会等名 kpa70+（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On the Andreadakis conjecture of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 Johnson homomorphisms and related topics 2019（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On the basis-conjugating automorphism groups of free groups
3. 学会等名 RIMS研究集会「変換群論とその応用」
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐藤 隆夫
2. 発表標題 On twisted cohomology groups of the automorphism groups of free groups
3. 学会等名 ホモトピー那覇2019（招待講演）
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関