

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 5 月 16 日現在

機関番号：12605

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2019～2022

課題番号：19K03487

研究課題名(和文)ねじれアレキサンダー多項式を中心とした双曲多様体の不変量の研究

研究課題名(英文)Research on invariants of hyperbolic manifolds centered around twisted Alexander polynomials

研究代表者

合田 洋 (Goda, Hiroshi)

東京農工大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60266913

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：結び目ダイアグラムから得られるグラフに行列の重みをつけたものに対するゼータ関数を用いて、ねじれアレキサンダー多項式を表示することに成功した。錐多様体の幾何学的構造とねじれアレキサンダー多項式との関係を調べ、双曲多様体の錐構造の変形に応じたねじれアレキサンダー多項式の変化を記述した。さらに鏡像の関係にある結び目のねじれアレキサンダー多項式の係数についての条件を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

先行研究によりねじれアレキサンダー多項式と結び目の双曲体積の関係が知られているが、それを起点に色付きジョーンズ多項式と結び目の双曲体積の関係を調査するための糸口としてねじれアレキサンダー多項式のゼータ関数を用いた表示を得ることができた。また双曲多様体の錐構造とねじれアレキサンダー多項式との記述もある程度できた。結び目およびその補空間の幾何学的構造を結び目不変量を使って解明、記述することに貢献することができた。

研究成果の概要(英文)：We have succeeded in presenting the twisted Alexander polynomials using the zeta function for the matrix-weighted graph obtained from a knot diagram. We investigated the relationship between the geometric structure of a cone manifold and the twisted Alexander polynomials, and described the change of the twisted Alexander polynomials according to the deformation of the cone structure of a hyperbolic manifold. Furthermore, we obtained the conditions for the coefficients of the twisted Alexander polynomials of knots in the mirror image relationship.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：knot Alexander polynomial 3-manifold zeta function

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

結び目は生活の様々な場所に現れる身近な対象であり数学の研究対象になっている。結び目の研究において中心的役割を果たすのが結び目不変量と呼ばれる多項式である。数学的な結び目の研究が始まって以来、様々な結び目不変量が発見され、多々の研究結果が得られてきた。その中で特にアレキサンダー多項式はその中心的役割を果たすものである。また 20 世紀後半に発見されたジョーンズ多項式、ホフフリー多項式も現在にいたるまでさかんに研究されている。

一方、体積はおそらく有史以来生活の様々な場所で使われる概念であり、数学においても特に幾何学において極めて基本的かつ重要な概念である。この二つの概念を結びつける先行研究として、ねじれアレキサンダー多項式と結び目補空間の双曲体積の関係が知られていた。それは双曲結び目のホロノミー表現に付随したねじれアレキサンダー多項式の変数に 1 を代入したものの漸近挙動から双曲体積が抽出できるというものである。

ジョーンズ多項式を拡張した色付きジョーンズ多項式からも同じようにして双曲体積が抽出できるのではないかという予想が 20 年程前に提出されている。これは自然対数の変数に絶対値がついた式を含むものだが、さらに一般化としてその絶対値を外すと複素体積とよばれる量が出てくるのではないかと予想されている。

アレキサンダー多項式とジョーンズ多項式はその出自を異とするものであるが、2 変数の不変量であるホフフリー多項式の各変数にしかるべき変数を代入するとそれぞれが得られるという意味でホフフリー多項式により統率されている多項式不変量であるとみなせることが知られている。

2. 研究の目的

ねじれアレキサンダー多項式の特殊値および漸近挙動を調べ、それらの他の結び目不変量との関係を明らかにすることを目標の一つとした。特に双曲結び目補空間の体積に注目し体積に関わる様々な公式を得ることを目的とした。具体的には以下の 5 つを目的とした。

- (I) ねじれアレキサンダー多項式に 1 の冪根を代入した値のふるまい。
- (II) ねじれアレキサンダー多項式のねじれゼータ関数を用いた表示、ファイバー結び目の場合のねじれレフセツゼータ関数を用いた表示。
- (III) 結び目を平行化して得られる絡み目に対する多変数ねじれアレキサンダー多項式の研究。
- (IV) ねじれジョーンズ多項式、ねじれホフフリー多項式の定義。
- (V) 錐多様体も含む双曲多様体の体積の表示。

これらに加え、ねじれアレキサンダー多項式を用いた体積公式に表れる自然対数の変数について絶対値を外したときに何が得られるのかの調査を行うことも目的の一つとした。

3. 研究の方法

論文その他文献を読みかつ自分の手で計算し新しい数学を構築するという数学の基本的な研究方法に加え、コンピュータを用いた数値実験を行い論理の検証、予想をたてることなどを遂行した。具体的には Mac Book Pro に数式処理システム Mathematica をインストールして数値実験を繰り返した。2019 年度は国内、国外の出張を行い研究打ち合わせ、研究発表、研究最新情報の収集を行い研究に役立てることができた。特に 2019 年 11 月には中国成都で行われた第 3 回環太平洋国際研究集会にて講演を行い、レビューを受けた。2020 年度からはコロナの影響で出張できなくなったので、出張のために計上していた予算から捻出したお金でコンピュータ通信機器を充実させオンライン会議や研究集会への zoom 参加で研究打ち合わせその他を行った。

2022 年度後半になってコロナによる規制が多少緩和され、国内出張や国際集会を開催することができ有益な研究打ち合わせや研究最新情報の交換が行えた。またコロナの影響で zoom 開催の一回だけだったが所属する東京農工大学のセミナーで専門的知識の提供を受けることができ役立った。

4. 研究成果

研究の目的欄の (I) についてはスペイン、フランスの数学者 4 名の共同研究により先に研究結果を出されてしまった。内容は研究代表者の先行研究を拡張したものであり、ねじれアレキサンダー多項式に 1 の冪根だけでなく、より一般に絶対値 1 の複素数を代入した値のふるまいを調べ、その値からも結び目補空間の体積が抽出できるという内容であった。

研究の目的欄の (II) については、結び目ダイヤグラムから得られるグラフに行列の重みを付けたものに対するゼータ関数という概念を応用してねじれアレキサンダー多項式を表示することに成功した。結果をまとめ、「Twisted Alexander polynomial and Matrix-weighted zeta function」というタイトルの論文を執筆し、Kyushu Journal of Mathematics から出版することができた。ゼータ関数は様々な表示を持つので、それらを利用した双曲体積の表示を提示する

ことができた．そして先行研究も含めその内容を様々な研究集会やセミナーで講演した．

研究の目的欄の(III)については，2019年8月21日に神戸大学で講演を行った際の講演後の研究情報交換の中で頂いたアドバイスにしたがい，ねじれアレキサンダー多項式を用いた体積公式の中に表れる自然対数の変数の絶対値を外すと複素体積が抽出できるのではないかと，いくつかの参考文献などを元にコンピュータ実験を含めた様々な計算を行い様々なアプローチを考え試行錯誤した．結局論文にまとめて発表できるほどの結果を得ることができなかったが，研究の経過については口頭発表を行った．

研究の目的欄の(IV)については特に記述できる結果を得ることができなかった．

研究の目的欄の(V)については，目標の錐多様体の体積の表示までは達成できなかったが，慶応大学の森藤孝之氏の協力を得て錐多様体の幾何学的構造とねじれアレキサンダー多項式の関係性を調べ，双曲多様体の錐構造の変形に応じたねじれアレキサンダー多項式の変化を記述することができた．さらに鏡像の関係にある結び目のねじれアレキサンダー多項式の係数についてある条件を得ることができた．この条件を *twist knot* と呼ばれる結び目のクラスについて精査しこの結び目のクラスについてはこの条件が必要十分条件になることを示した．これらの結果をまとめて森藤氏と共著で「*Twisted Alexander polynomials, chirality, and local deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds*」というタイトルで論文を執筆し，*Annales Mathematiques Blaise Pascal* という専門誌からアクセプトをいただいた．

その後，森藤氏と共同で研究の目的欄の(II)についてさらに研究を進め，ファイバー結び目のモノドロミー行列を用いた体積表示を得ることができた．この表示のためには主に組み合わせ論で使われるベル多項式と呼ばれる多項式が必要であった．また特に8の字結び目についてはある整数列で体積表示できることが証明できたが，ここでは初等的整数論の二次体に関する知識が必要であった．これまでは研究の範疇になかったこれら代数的な概念について，本科研費を用いて文献を購入し勉強することで結果を得ることができた．この内容については「ファイバー結び目の体積表示」というタイトルで2022年12月に日本大学文理学部で開催された研究集会「結び目の数理Ⅴ」で講演を行った．

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hiroshi Goda	4. 巻 74
2. 論文標題 Twisted Alexander polynomial and Matrix-weighted zeta function	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Kyushu Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 211-221
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2206/kyushujm.74.211	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計15件（うち招待講演 9件 / うち国際学会 1件）

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 ファイバー結び目の体積表示
3. 学会等名 研究集会「結び目の数理」
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 Volume formulas using the twisted Alexander invariant and the matrix weighted zeta function
3. 学会等名 東京工業大学大岡山談話会 (zoom開催) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 結び目ダイヤグラムから得られるグラフとリンドン語
3. 学会等名 東京女子大学トポロジーセミナー (zoom開催) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 リンドン語と結び目論的ゼータ
3. 学会等名 N-KOOKセミナー（大阪市立大学(zoom開催)）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 Twisted Alexander polynomials, chirality, and local deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds (森藤孝之氏との共同研究)
3. 学会等名 トポロジーとコンピュータ（東京工業大学(zoom開催)）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 Twisted Alexander polynomials, chirality, and local deformations of hyperbolic 3-cone-manifolds (森藤孝之氏との共同研究)
3. 学会等名 東大数理トポロジー火曜セミナー(zoom開催)（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 ファイバー結び目の体積表示（森藤孝之氏との共同研究）
3. 学会等名 山梨大学トポロジーセミナー(zoom開催)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 TAP and CS
3. 学会等名 農工大セミナー (zoom開催)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 グラフのサイクルを用いた結び目の体積表示
3. 学会等名 東北結び目セミナー (zoom開催) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 Volume formulas using the twisted Alexander invariant and the matrix weighted zeta function
3. 学会等名 九州大学数理学府トポロジー金曜セミナー (zoom開催) (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 ねじれアレキサンダー多項式とグラフの行列加重ゼータ関数
3. 学会等名 拡大K00Kセミナー2019
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 結び目の体積公式とゼータ関数
3. 学会等名 東京電機大学数学講演会 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Goda
2. 発表標題 Twisted Alexander polynomial and Matrix weighted zeta function
3. 学会等名 The 3rd Pan-Pacific International Conference Topology and its Applications (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 結び目の体積と多項式不変量
3. 学会等名 東京理科大学理工学部数学科談話会 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 合田洋
2. 発表標題 TAP and CS
3. 学会等名 慶應トポロジーセミナー
4. 発表年 2020年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------