様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　 ５ 月 ２９ 日現在

機関番号：１４４０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４９１

研究課題名（和文）４次元多様体の微分構造と結び目

研究課題名（英文）Smooth structures of 4-manifolds and knots

研究代表者
安井　弘一（Yasui, Kouichi）

大阪大学・大学院情報科学研究科・准教授

研究者番号：７０５４７００９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：４次元多様体と呼ばれる４次元の幾何学的対象について、その微分構造を研究した。特に、コホモロジー環に関するある条件の下で全ての連結有向閉４次元多様体が mod 2 単純型であることを示し、1990 年代に提出された単純型予想に対してその mod 2 版の部分的解決を与えた。また、同値な種数関数を持つ互いにエキゾチックな４次元多様体の組織的構成法を与え、種数関数の微分構造の不変量としての限界を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
単純型予想はゲージ理論における懸案の問題であり、その mod 2 版の部分的解決は４次元多様体のSeiberg-Witten 不変量の性質解明において重要である。位相構造の適当な条件の下で、４次元位相多様体上の全ての微分構造に共通する新しい有用な性質を明らかにしたという点にも意義がある。種数関数は４次元トポロジーで 60 年以上にわたって研究されている基本的な研究対象であり、本研究でその不変量としての限界を明らかにしたことは重要である。

研究成果の概要（英文）：We studied smooth structures of 4-dimensional geometric objects, which are called 4-manifolds. Specifically, under a certain assumption on the cohomology ring, we proved that every closed connected oriented 4-manifold is of mod 2 simple type, giving a partial solution to the mod 2 version of the simple type conjecture posed in 1990s. We also gave a systematic construction of exotic 4-manifolds having equivalent genus functions. This result shows a limitation of genus functions as invariants of smooth structures.

研究分野：位相幾何学

キーワード：４次元トポロジー　４次元多様体　微分構造　種数関数　コルク　単純型予想　Seiberg-Witten 不変量　Bauer-Furuta 不変量

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１（共通）

１．研究開始当初の背景

多様体の微分構造の分類問題は、５次元以上の高次元では 1960 年代までに手術理論などによる一般論が展開され十分に理解されている。また３次元以下の低次元では、微分構造は下部構造である位相構造から一意に定まり、基本群でおよそ分類されることが知られている。一方、高次元と低次元の狭間である４次元では、２件のフィールズ賞受賞研究に起因する飛躍的進展にも関わらず、４次元固有の様々な現象のため未だに微分構造の分類には程遠い。実際、その上の微分構造が分類されている位相構造ですら一つも得られていない。そのためエキゾチック（すなわち同相だが微分同相でない）微分構造の存在問題は４次元トポロジーの主要課題であり、ハンドル体論、写像類群、シンプレクティック幾何、ゲージ理論などの様々な方法・観点から国内外の多数の研究者によって活発に研究されている。これまでに無限個のエキゾチック微分構造をもつ４次元多様体が多数存在することが明らかにされたが、一般には未解決である。一方、４次元多様体の様々な性質の解明や興味深い具体例の構成を行うことで全体の様相を探ることも、微分構造の分類へ向けた重要な課題である。

４次元トポロジーの応用も興味深い問題である。枠付き結び目はハンドル体を経由することで自然に境界付き４次元多様体を与える。この対応を通して４次元多様体の不変量による、３次元トポロジーへの様々な強力な応用（結び目の４次元種数など）が得られている。しかし、４次元多様体の構成的側面の応用は少ないため、４次元多様体の構成法を発展させることで３次元トポロジーへの新しい応用を与えることも重要な課題である。

２．研究の目的

本研究は４次元多様体の微分構造の性質を様々な観点から解明することで、微分構造の分類問題の進展に寄与することを目的とする。具体的には、主に以下の観点から探ることが本研究課題申請時における目的である。
（１）幾何学的単連結性と４次元多様体の微分構造
（２）４次元多様体の微分構造と安定化
（３）枠付き結び目で表される４次元多様体とその応用

３．研究の方法

具体例の構成は、ハンドル体や Lefschetz ファイバー空間などの構成法と、コルクや対数変換などの切り貼りの操作とを組み合わせることで研究を進める。微分構造の区別や性質の解明は、ゲージ理論、Stein 構造、シンプレクティック構造などによる微分構造への制約を種数関数などと組み合わせることで研究を進める。研究を効果的に進展させるために、国内外の研究集会に参加・発表し、さらにセミナーや研究集会を開催し、情報交換を行う。

４．研究成果

主な研究成果を個別の研究の背景とともに述べる。

（１）1990 年代に提出された「全ての連結有向閉４次元多様体は単純型である」という予想は、４次元多様体の微分構造の代表的な不変量である、Seiberg-Witten 不変量への大きな制約を与える。単純型予想と呼ばれるこの予想は多くの具体例に対して成立し、さらに全てのシンプレクティック閉４次元多様体に対しても成立することが 2000 年代までに示されている。しかし、一般には依然として未解決であり、ゲージ理論における懸案の問題となっている。本研究課題において、研究代表者はコホモロジー環に関するある条件の下では全ての連結閉有向４次元多様体が mod 2 単純型であることを、加藤毅教授（京都大学）、中村信裕教授（福島県立医科大学）との共同研究で示した。この結果は位相４次元多様体の広いクラスに対してその上の全ての微分構造が mod 2 単純型であることを示すものであり、単純型予想の mod 2 版の部分的解決となっている。証明は研究代表者が 2019 年の論文で用いた、 Bauer-Furuta 不変量と種数関数の組み合わせによる手法の発展である。また部分的解決の応用として、４次元多様体内の自己交叉数が負の閉曲面に対する随伴不等式の mod 2 版が、４次元多様体の位相構造のみに関する仮定のみで成立することを示した。これらの共同研究の成果は国際会議等の研究集会で発表し、さらに Journal of the European Mathematical Society からオープンアクセス論文として出版された。また、単純型予想への異なるアプローチとして、研究代表者と加藤教授（京都大学）、岸本大祐教授（九州大学）、中村信裕教授（福島県立医科大学）との共同研究では、第一ベッチ数が０の連結閉有向４次元多様体がもつ任意の Seiberg-Witten 基本類に対し、仮想次元の上からの評価を与えた。この評価は４次元多様体の位相構造と Seiberg-Witten 不変量の値のみから定まり、

証明には代数トポロジーと Bauer-Furuta 不変量を用いた。応用として、４次元多様体の位相構造と Seiberg-Witten 不変量の値のみから定まる条件の下で随伴不等式が成立することを示した。これらの共同研究の成果をまとめた論文は arXiv で公開し、国際誌に投稿中である。

（２）４次元多様体の２次ホモロジー類に対してそれを代表する曲面の最小種数を対応させる関数を、その４次元多様体の種数関数という。種数関数は４次元トポロジーで 60 年以上にわたって研究されている基本的な研究対象である。微分構造の強力な不変量であるため、種数関数が不変量としてどの程度強力かという問いが自然に考えられる。２次ホモロジー群が自明な場合は種数関数で区別できないエキゾチック微分構造が存在する。しかしこの場合は種数関数が必然的に自明なので、ホモロジーの大きい場合が特に興味深い。本研究課題において、研究代表者は同値な種数関数を持つ互いにエキゾチックな４次元多様体の組織的構成法を与えた。特に、位相不変量に関して非常に広いクラスの境界付き４次元多様体が、種数関数で区別できない無限個のエキゾチック微分構造を持つことを示した。この成果は種数関数の不変量としての限界を、２次ホモロジー群が大きい場合も含めて明らかにしている。また種数関数を応用することにより、適当な条件の下で４次元多様体のエキゾチック性を保つ新しい操作を与えた。これらの成果は国際会議等の研究集会で発表し、2023 年度日本数学会秋期総合分科会における特別講演の講演アブストラクト（10 頁）で報告した。詳細をまとめた論文を現在執筆中である。

（３）互いにエキゾチックな４次元多様体に対し、様々な操作がエキゾチック性を保つか否かという問題は、４次元多様体の微分構造の性質を解明するための重要な課題である。例えば、多くのエキゾチックな４次元多様体に対し、エキゾチック性は複素射影平面との連結和では保たれないが、複素射影平面の逆向きとの連結和では保たれることが知られている。本研究課題において、研究代表者は任意有限個の互いにエキゾチックな４次元多様体であって、定値な交叉形式を持つ任意の閉４次元多様体を何回連結和してもエキゾチック性が保たれるものを生成するアルゴリズムを与えた。複素射影平面とその逆向きはどちらも定値な交叉形式をもつため、この成果は前述の事実と対照的な例を与えている。さらにこのようなエキゾチックな４次元多様体が位相不変量に関して非常に広範囲に存在することを示した。また、無限個の互いにエキゾチックな４次元多様体であって、このような性質をもつものも与えた。そして、スパイン、コルク等への応用を与えた。これらの成果は国際会議等の研究集会で発表した。なおこれらの成果の一部は、発表の数年後に他の研究グループによっても異なる手法で独立に示された。（３）は（１）、（２）よりも先に得られた成果であるが、（１）、（２）の研究推進を優先したこともあり、論文の完成が遅れている。（２）の論文の執筆完了後に完成させる予定である。

これらの成果の他に、４次元多様体の結び目への新しい応用も与えたが、今後さらに研究を進め、より発展させた後に公表する予定である。また、指導学生（大阪大学大学院生）と４次元多様体に関して様々な観点から議論を進めた。以下、代表的な成果を列挙する。若槇洋平氏はホモロジーが小さい有理曲面のコルクや安定化に関する成果を得た。高橋夏野氏はコルクなどのトライセクション種数に関する成果を得た。若槇氏と高橋氏のこれらの成果は arXiv で論文として公表し、国際誌に投稿中である。阪本稜治氏は幾何学的単連結な楕円曲面の新たな例を与えた。米原翔唯氏は２つのＫ３曲面から構成されるある４次元多様体の安定化に関する成果を得た。阪本氏と米原氏の成果は修士論文として発表している。なお、若槇氏、高橋氏、阪本氏は研究成果をもとに大阪大学情報科学研究科賞をそれぞれ受賞している。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計1件（うち査読付論文　1件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Tsuyoshi Kato, Nobuhiro Nakamura and Kouichi Yasui	４．巻 25
２．論文標題 The simple type conjecture for mod 2 Seiberg-Witten invariants	５．発行年 2023年
３．雑誌名 Journal of the European Mathematical Society	６．最初と最後の頁 4869-4877
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JEMS/1297	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

〔学会発表〕　計16件（うち招待講演　12件／うち国際学会　7件）

１．発表者名 Kouichi Yasui
２．発表標題 Genus functions of 4-manifolds and their applications
３．学会等名 Differential Topology '24 Cork, exotic structure, concordance（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2024年

１．発表者名 安井弘一
２．発表標題 Exotic 4-manifolds and genus functions
３．学会等名 研究集会「４次元トポロジー」
４．発表年 2023年

１．発表者名 安井弘一
２．発表標題 ４次元多様体の微分構造と種数関数
３．学会等名 日本数学会 2023 年度秋季総合分科会（招待講演）
４．発表年 2023年

１．発表者名
Kouichi Yasui

２．発表標題
Sums of 4-manifolds, genus functions and their applications

３．学会等名
Gauge Theory in Kyoto（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2023年

１．発表者名
Kouichi Yasui

２．発表標題
Sums of 4-manifolds, genus functions and their applications

３．学会等名
4-Manifolds: From Above and Below（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2022年

１．発表者名
安井弘一

２．発表標題
Sums of 4-manifolds, genus functions and their applications

３．学会等名
九州大学金曜トポロジーセミナー（招待講演）

４．発表年
2022年

１．発表者名
安井弘一

２．発表標題
Stably exotic pairs of closed 4-manifolds and their applications

３．学会等名
研究集会「４次元トポロジー」

４．発表年
2021年

１．発表者名
Kouichi Yasui

２．発表標題
Minimal genus functions and constraints on 4-manifolds

３．学会等名
International Workshop on 4-Manifold Theory and Gauge Theory（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2020年

１．発表者名
安井弘一

２．発表標題
Embedded surfaces and the simple type conjecture

３．学会等名
研究集会「４次元トポロジー」

４．発表年
2020年

１．発表者名
Kouichi Yasui

２．発表標題
Minimal genus functions and smooth structures of 4-manifolds

３．学会等名
Workshop on low-dimensional topology（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Kouichi Yasui

２．発表標題
Nonexistence of twists and surgeries generating exotic 4-manifolds

３．学会等名
Workshop on low-dimensional topology（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
Kouichi Yasui

２．発表標題
Minimal genus functions and smooth structures of 4-manifolds

３．学会等名
Workshop on Lefschetz Pencils and Low dimensional Topology（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2019年

１．発表者名
安井　弘一

２．発表標題
Stably exotic 4-manifolds

３．学会等名
4-Dimensional Topology and Gauge Theory（招待講演）

４．発表年
2020年

１．発表者名
安井　弘一

２．発表標題
4 次元多様体の微分構造と幾何学的単連結性

３．学会等名
広島大学談話会（招待講演）

４．発表年
2019年

１．発表者名
安井　弘一

２．発表標題
Smooth 4-manifolds and geometric simple connectivity

３．学会等名
京都大学数学教室談話会（招待講演）

４．発表年
2019年

１．発表者名 安井　弘一
２．発表標題 Stably exotic 4-manifolds
３．学会等名 研究集会「４次元トポロジー」
４．発表年 2019年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

（１）ホームページ
https://researchmap.jp/kyasui

（２）アウトリーチ活動での発表
・安井弘一，トポロジーと４次元多様体，高校生のための公開講座，大阪大学理学部数学科，2023 年 11 月 4 日．
・安井弘一，トポロジーで図形を見てみよう，大阪大学大学院情報科学研究科，2021 年 5 月 1 日．

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関