様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　６ 年　６ 月 １０ 日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2019～2023
課題番号：１９Ｋ０３４９５

研究課題名（和文）境界付き多様体のMorse理論と，そのFloer理論への応用

研究課題名（英文）Morse theory on manifolds with boundary and its application to Floer theory

研究代表者
赤穂　まなぶ（Akaho, Manabu）

東京都立大学・理学研究科・准教授

研究者番号：３０３３２９３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,200,000円

研究成果の概要（和文）：従来のMorse理論では主に閉多様体を扱っていたが、本研究課題では、境界付き多様体におけるMorseホモロジー上のMorseホモトピーと呼ばれるA∞代数構造の構成を目指した。境界付き多様体のMorseホモロジーでは境界付近でのMorse関数の勾配ベクトル場の積分曲線の振る舞いが鍵となる。これまで本研究代表者により、境界付き多様体のMorseホモロジー上にカップ積とよばれる積構造が構成されたが、残念ながら、より高次の積構造に対しては、その際に現れる勾配treeの振る舞いが組み合わせ的に複雑すぎて、その明示的な構成にはまだ至っていない。

研究成果の学術的意義や社会的意義
Morse理論とは関数を用いて図形や空間の位相幾何学的な性質を調べる理論である。特に本研究課題では境界付き多様体におけるMorseホモロジーの代数構造に注目し研究を行なった。本研究の学術的意義は、境界付き多様体のMorseホモロジーを理解することにより、接触多様体を境界に持つシンプレクティック多様体におけるLagrange部分多様体のFloer理論や、接触多様体におけるLegendre部分多様体の接触ホモロジーへの理解の手助けになると考えられる点である。また、社会的意義としては、様々な場面に現れる関数の最大値最小値の問題や、変分問題への理解が深まる点であると期待している。

研究成果の概要（英文）：Morse theory has mainly dealt with closed manifolds, but in this research project, we consider Morse homology of manifolds with boundary, especially their algebraic structures, so called Morse homotopy, or A-infinity structures. In Morse homology of manifolds with boundary, the behavior of the integral curves of the gradient vector field of Morse functions near the boundary is important. So far, the research director has constructed a product structure called the cup product for the Morse homology of manifolds with boundary. But, unfortunately, for higher-order product structures, the behavior of the gradient tree that appears in these structures is too combinatorially complicated, and no explicit construction of such structures has yet been achieved.

研究分野：シンプレクティック幾何学

キーワード：境界付き多様体　Morse理論　シンプレクティック多様体　Floer理論

１．研究開始当初の背景

(1) Morse 理論とは多様体上の Morse 関数を用いて、多様体の位相幾何学的な性質を調べる理論である。従来の Morse 理論では、主に、閉多様体（コンパクトで境界を持たない多様体）が扱われていたが、本研究課題ではコンパクトで境界を持つ多様体における Morse 理論の研究を行った。その発端となった研究開始当初の背景は、シンプレクティック場の理論（文献 [1]）である。

(2) シンプレクティック場の理論では、凹（concave）型と凸（convex）型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体を扱う。特に、本研究課題で注目するのは、凹型の無限遠を持つ場合である。N を $2n-1$ 次元接触多様体とし、λ を N 上の接触形式とする。このとき、t を半直線 $(-\infty, 0]$ の標準的な座標とすると、直積 $(-\infty, 0] \times N$ 上の 2 形式 $d(e^t\lambda)$ は、$(-\infty, 0] \times N$ 上のシンプレクティック形式となる。今、非コンパクトなシンプレクティック多様体 M が、コンパクトな部分集合の補集合で $((-\infty, 0] \times N, d(e^t\lambda))$ とシンプレクティック多様体として同型になるとき、$((-\infty, 0] \times N, d(e^t\lambda))$ を M の凹型の無限遠という。

(3) 凹型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体上には、シンプレクティック形式と整合的で、しかも、凹型の無限遠上で $(-\infty, 0]$ 方向のシフトに関して不変な概複素構造が定まる。今、そのような概複素構造を一つ固定し、Riemann 面からの擬正則写像（擬正則曲線）の列を考える。もし、この擬正則曲線の列の像がコンパクトな領域に留まる場合は、従来のコンパクトなシンプレクティック多様体の場合と同様に、この列の極限を上手く扱うことができる。しかし、この擬正則曲線の列の像がコンパクトな領域に留まらない場合は、この列の像が $t \to -\infty$ の方向にどんどん逃げてしまうため、様々な問題が起こる。

(4) Riemann 面から凹型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体への擬正則写像全体のなす集合を、ここでは擬正則曲線のモジュライ空間とよぶことにする。文献 [1] では、このモジュライ空間のコンパクト化の様子を定性的に調べ、そして、そこから得られるシンプレクティック多様体および接触多様体の不変量や、ある種の代数の構成についての示唆がなされている。

参考文献

[1] Y. Eliashberg,A. Givental and H. Hofer,Introduction to symplectic field theory,GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999), Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560-673.

２．研究の目的

(1) 本研究課題の目的は、境界付き多様体の Morse ホモロジーにおける勾配 tree グラフの数え上げによる高次積構造の明示的な表示と、その、凹型の無限遠を持つシンプレクティック多様体における Lagrange 部分多様体の Floer 理論への応用である。

(2) Lagrange 部分多様体とはシンプレクティック多様体の重要なクラスの部分多様体であり、Lagrange 部分多様体の交叉理論とは不動点定理のある種の一般化と捉えることができる。その Lagrange 部分多様体の交叉理論において、Floer は次のように構成されるホモロジー群を導入した（文献 [3]）。L_0 と L_1 をシンプレクティック多様体 M の Lagrange 部分多様体で、横断的に交わっているものとする。次に、M にシンプレクティック形式と整合的な概複素構造を一つ固定し、L_0 と L_1 の交点 p, q に対して、擬正則写像 $u : \mathbb{R} \times [0, 1] \to M$ で、$u(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset L_0$, $u(\mathbb{R} \times \{1\}) \subset L_1$ かつ $\lim_{t\to-\infty} u(\{t\} \times [0, 1]) = p$, $\lim_{t\to\infty} u(\{t\} \times [0, 1]) = q$ という境界条件を満たすものを考える。ここでは、そのような擬正則写像を p と q を結ぶ擬正則 strip とよぶことにする。今、M, L_0, L_1 はコンパクトで境界を持たないと仮定すると、L_0 と L_1 の交点は有限個であり、さらに、p と q を結ぶ仮想次元が 0 の擬正則 strip も有限個であることがわかる。そこで、L_0 と L_1 の交点を生成元とする $\mathbb{Z}_2$ 係数自由加群を C とし、さらに、L_0 と L_1 の交点を結ぶ仮想次元が 0 の擬正則 strip の数え上げを用いて準同型写像 $\partial : C \to C$ を定める。すると、バブルという現象が起きない場合、$\partial^2 = 0$ が成り立ち、そのホモロジー群 $HF(L_0, L_1) := \mathrm{Ker}\,\partial/\mathrm{Im}\,\partial$ を定義することができる。この $HF(L_0, L_1)$ を

L_0 と L_1 の Floer ホモロジーとよぶ。

(3) 実は、Floer ホモロジーはある種の Morse ホモロジーと解釈することができる。M をコンパクトで境界を持たない多様体とし、M 上の Riemann 計量を一つ固定する。次に、$f : M \to \mathbb{R}$ を M 上の Morse 関数とし、f の臨界点 p, q に対して、$-f$ の勾配ベクトル場の積分曲線 $u : \mathbb{R} \to M$ が $\lim_{t\to-\infty} u(t) = p, \lim_{t\to\infty} u(t) = q$ という条件を満たすとする。このとき、Morse 指数の差が 1 となる f の臨界点 p, q を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線は有限個であることがわかる。そこで、f の臨界点を生成元とする $\mathbb{Z}$ 係数自由加群を C とし、さらに、Morse 指数の差が 1 となる f の臨界点を結ぶ $-f$ の勾配ベクトル場の積分曲線の数え上げを用いて準同型写像 $\partial : C \to C$ を定める。すると、$\partial^2 = 0$ が成り立ち、そのホモロジー群 $HM(M; f) := \mathrm{Ker}\,\partial/\mathrm{Im}\,\partial$ を定義することができる。この $HM(M; f)$ を Morse ホモロジーとよぶ。実は、f の Morse ホモロジーは M の特異ホモロジーと同型になる。

(4) 次に、L_0 と L_1 を凹型の無限遠をもつシンプレクティック多様体 M の Lagrange 部分多様体で、凹型の無限遠 $(-\infty, 0] \times N$ において、それぞれ N の Legendre 部分多様体 Λ_0, Λ_1 を用いて、$L_0 = (-\infty, 0] \times \Lambda_0, L_1 = (-\infty, 0] \times \Lambda_1$ という形をしているとする。また、L_0 と L_1 は横断的に交わり、さらに、接触多様体上には、接触形式から定まる Reeb ベクトル場とよばれるベクトル場が定まるが、Λ_0 の点を始点とし、Λ_1 の点を終点に持つ Reeb ベクトル場の積分曲線が離散的に現れるとする。このような Reeb ベクトル場の積分曲線を Reeb コードとよぶ。ここで、L_0 と L_1 の交点 p, q を結ぶ仮想次元が 1 の擬正則 strip の列を考える。もし、この擬正則 strip の列の像がコンパクトな領域に留まり、かつ、バブルという現象が起きない場合は、p, q を結ぶ擬正則 strip の列は、p と L_0, L_1 の交点 r を結ぶ擬正則 strip と r, q を結ぶ擬正則 strip の 2 つに分裂し、収束する。これが Floer ホモロジーにおいて $\partial^2 = 0$ となる根拠であった。しかし、擬正則 strip の列の像がコンパクトな領域に留まらない場合は、以下のような現象が起こる。

(5) 凹型の無限遠をもつシンプレクティック多様体 M の Lagrange 部分多様体 L_0 と L_1 の交点 p, q を結ぶ、仮想次元が 1 の擬正則 strip の列の像が、コンパクトな領域に留まらないとする。すると、バブルが起こらない場合、その列は次の 3 つの擬正則 strip に分裂し、収束する。

- 擬正則写像 $u : \mathbb{R}\times[0,1] \to M$ で、$u(\mathbb{R}\times\{0\}) \subset L_0, u(\mathbb{R}\times\{1\}) \subset L_1$ かつ $\lim_{t\to-\infty} u(\{t\}\times[0,1]) = p$、さらに、$(-\infty, 0] \times N$ において u を $u = (u_1, u_2)$ と分解すると、$\lim_{t\to\infty} u_1(\{t\}\times[0,1]) = -\infty$, $\lim_{t\to\infty} u_2(\{t\}\times[0,1]) = \gamma(t)$ となる。ただし、$\gamma : [0,1] \to N$ は Λ_0 の点を始点とし、Λ_1 の点を終点とする Reeb コードである。

- 擬正則写像 $v : \mathbb{R}\times[0,1] \to \mathbb{R}\times N$ で、$v(\mathbb{R}\times\{0\}) \subset \mathbb{R}\times\Lambda_0, v(\mathbb{R}\times\{1\}) \subset \mathbb{R}\times\Lambda_1$、かつ $\mathbb{R}\times N$ に沿って $v = (v_1, v_2)$ と分解すると、$\lim_{t\to-\infty} v_1(\{t\}\times[0,1]) = \infty$, $\lim_{t\to-\infty} v_2(\{t\}\times[0,1]) = \gamma(t)$、さらに、$\lim_{t\to\infty} v_1(\{t\}\times[0,1]) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} v_2(\{t\}\times[0,1]) = \delta(t)$、ただし、$\delta : [0,1] \to N$ は Λ_0 の点を始点とし、Λ_1 の点を終点とする Reeb コードである。

- 擬正則写像 $w : \mathbb{R}\times[0,1] \to M$ で、$w(\mathbb{R}\times\{0\}) \subset L_0, w(\mathbb{R}\times\{1\}) \subset L_1$ かつ $\lim_{t\to\infty} w(\{t\}\times[0,1]) = q$、さらに、$(-\infty, 0]\times N$ において w を $w = (w_1, w_2)$ と分解すると、$\lim_{t\to-\infty} u_1(\{t\}\times[0,1]) = -\infty$, $\lim_{t\to-\infty} u_2(\{t\}\times[0,1]) = \delta(t)$ となる。

この様な振る舞いをする擬正則 strip から Floer ホモロジーを構成するためのアイデアが、境界付き多様体の Morse ホモロジーである（文献 [4][5]）。

(6) M をコンパクトな境界付き多様体とし、$N_1, \ldots, N_m$ をその境界とする。このとき、M 上の Riemann 計量 g は、N_i のカラー近傍 $[0,1) \times N_i$ 上において、$g|_{[0,1)\times N_i} = (r^2+1)g_i + dr \otimes dr$ という形をしているとする。ただし、g_i は N_i 上の Riemann 計量、また、$r \in (0,1)$ とする。次に、M 上の Morse 関数 f は、同じく $[0,1) \times N_i$ 上において、$f|_{[0,1)\times N_i} = (r^2+1)h_i + c_i$ という形をしているとする。ただし、h_i は N_i 上の Morse 関数、また、c_i は定数とする。このとき、f の勾配ベクトル場 X_f は $[0,1) \times N_i$ 上で $X_f = X_{h_i} + 2h_i r\partial/\partial r$ となる。ただし、X_{h_i} は N_i 上の Morse 関

数 h_i に関する勾配ベクトル場である。この Morse 関数の最大の特徴は、f が境界上にも臨界点を持ち、さらに、境界上の臨界点において f の値は 0 にはならず、勾配ベクトル場 X_f は、境界 N_i 上で X_{h_i} と一致する点である。ここで、Morse 指数の差が 2 となる、M の内部における f の臨界点 p, q を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線の列を考える。もし、この積分曲線の列の像が、M の内部のコンパクトな領域に留まるならば、p, q を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線は、p と臨界点 r を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線と、r, q を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線の 2 つに分裂し、収束する。これが Morse ホモロジーにおいて $\partial^2 = 0$ となる根拠であった。しかし、勾配ベクトル場の積分曲線の列が M の内部のコンパクトな領域に留まらない場合は、以下のような現象が起こる。

(7) 境界付き多様体上の Morse 関数 f の、Morse 指数の差が 2 となる、M の内部における臨界点 p, q を結ぶ、勾配ベクトル場の積分曲線の列が、M の内部のコンパクトな領域に留まらないとする。すると、その列は次の 3 つの勾配ベクトル場の積分曲線に分裂し、収束する。

- p と境界上の臨界点 γ を結ぶ f の勾配ベクトル場の積分曲線。
- 境界上の Morse 関数の臨界点 γ, δ を結ぶ、境界上の Morse 関数の勾配ベクトル場の積分曲線。
- δ と q を結ぶ f の勾配ベクトル場の積分曲線。

ここまでくれば、凹型の無限遠を持つシンプレクティック多様体における Lagrange 交叉理論との対比は明らかであるが、Lagrange 部分多様体の交点は Morse 関数の内部の臨界点に対応し、Reeb コードは境界上の Morse 関数の臨界点に対応している。そして、文献 [4][5] では、このような境界付き多様体 M 上の Morse 関数に対して Morse ホモロジーを構成し、さらに、その Morse ホモロジーが M の特異ホモロジー群と同型になることを示した。

(8) 一方、文献 [6] で深谷賢治先生は、コンパクトで境界を持たない多様体 M において、M 上の複数の Morse 関数を用いて、A_∞ 代数もしくは A_∞ 圏とよばれる、ある種の代数構造を構成した。これは Morse ホモロジーの究極的な一般化であると言える。そして、本研究課題の目的は、この深谷先生による A_∞ 代数の構成を、境界付き多様体上の Morse 関数を用いて行うことである。

参考文献

[3] A. Floer, Morse theory for Lagrangian intersections, J. Differ. Geom. 28, No. 3, (1988) 513-547.

[4] M. Akaho, Morse homology and manifolds with boundary, Commun. Contemp. Math. 9 (2007), no. 3, 543-550.

[5] M. Akaho, Morse homology of manifolds with boundary revisited, arXiv:1408.1474 (2014).

[6] K. Fukaya, Morse homotopy and its quantization, Geometric topology (Athens, GA, 1993), 409-440, AMS/IP Stud. Adv. Math., 2.1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

３．研究の方法

(1) 本研究課題における研究の方法は、Morse 関数の各臨界点の不安定多様体の交叉理論により、境界付き多様体における Morse ホモロジー上の A_∞ 代数の構成を行うことである。

(2) n 次元閉多様体 M 上に Morse 関数 f を一つ用意する。このとき、Morse 指数が k の臨界点 p の不安定多様体 U_p は、k 次元の開球体と微分同相である。さらに、f による M のハンドル分解において、臨界点 p に関するハンドルの芯 $D_p \subset U_p$ は、k 次元の閉球体に微分同相である。同様に、Morse 指数が $k-1$ の臨界点 q の安定多様体 S_q は、$n-(k-1)$ 次元開球体に微分同相である。このとき、p, q を結ぶ勾配ベクトル場の積分曲線と、D_p の境界 ∂D_p と S_q の交点が一対一に対応し、Morse ホモロジーを構成する際の勾配ベクトル場の積分曲線の数え上げは、∂D_p と S_q の交点の数え上げと等しいことがわかる。実は、文献 [4][5] で構成された境界付き多様体 M の Morse ホモロジーは、M の内部および境界上の臨界点に対するハンドルの芯の境界と、M の内部および境界上の臨界点に対する不安定多様体との交点の数え上げを用いて定義されている。

(3) ここから複数の Morse 関数を用いて、Morse ホモロジーに高次の積構造を構成することを考える。閉多様体 M 上の 3 つの Morse 関数を f_1, f_2, f_3 とする。このとき、f_1 の臨界点 p_1 の不安定多様体と、f_2 の臨界点 p_2 の不安定多様体と、f_3 の臨界点 p_3 の安定多様体の交点は、p_1 から出発する f_1 の勾配ベクトル場の積分曲線と、p_2 から出発する f_2 の勾配ベクトル場の積分曲線と、p_3 に到達する f_3 の勾配ベクトル場の積分曲線、この 3 本の積分曲線の交点と対応することがわかる。ここでは、これを勾配 Y 字グラフとよぶことにする。深谷先生は文献 [6] において、この勾配 Y 字グラフの数え上げを用いて f_1 の Morse ホモロジーと f_2 の Morse ホモロジーから、f_3 の Morse ホモロジーへの積を定義した。

(4) その一方で、境界付き多様体 M における Morse ホモロジーのカップ積の構成を、臨界点の不安定多様体の交叉理論と捉えると、M の境界 N 上の Morse 関数 h に関する臨界点の不安定多様体は、N において横断的に交わっていても、M においては横断的に交わっていないという問題が発生する。この問題を解消するために、文献 [7] では次のようなトリックを導入した。

参考文献

[7] M. Akaho, Cup products on Morse homology of manifolds with boundary. preprint (2011).

４．研究成果

(1) 本研究課題の成果は、境界付き多様体の Morse ホモロジーにおける勾配 tree グラフの数え上げによる高次積構造の構成である。ただし、残念ながら、その明示的な表示にはまだ至っていない。

(2) M を境界付き多様体とし、f_1, f_2, f_3 を M 上の 3 つの Morse 関数とする。このとき、M の境界 N における f_1 の臨界点 p_1 の不安定多様体 U_{p_1} と、N における f_2 の臨界点 p_2 の不安定多様体 U_{p_2} とが、N において横断的に交わっているとする。しかし、N のカラー近傍を $[0,1) \times N$ とすると、第一成分 $[0,1)$ の座標を少しずらすことにより、U_{p_1} と U_{p_2} は M においては交わらなくなる。これは、境界上の臨界点に関する不安定多様体および安定多様体の交叉が、N においては横断的でも、M においては横断的ではないということを示している。

(3) 本研究課題では、この問題を解決するために、次のようなトリックを導入した。M の境界 N のカラー近傍を $[0,1) \times N$ とするとき、$0 < \varepsilon < 1$ に対して、微分同相写像 $\varphi_\varepsilon : M \to M \setminus [0,\varepsilon) \times N$ を、$M \setminus [0,1) \times N$ 上では恒等写像、$[0,1) \times N$ 上では第一成分 $[0,1)$ を縮める写像とする。境界付き多様体 M 上の 3 つの Morse 関数を f_1, f_2, f_3 とする。このとき、f_1 の臨界点 p_1 の不安定多様体 U_{p_1} の φ_ε による像 $\varphi_\varepsilon(U_{p_1})$ と、f_2 の臨界点 p_2 の不安定多様体 U_{p_2} と、f_3 の臨界点 p_3 の安定多様体 S_{p_3} の交点を数え上げることにより、境界付き多様体の Morse ホモロジーにおいて積を定義することができる。

(4) 閉多様体においては 3 つの Morse 関数の不安定多様体とよび安定多様体の交点は、勾配 Y 字グラフに対応していたが、境界付き多様体における $\varphi_\varepsilon(U_{p_1}), U_{p_2}, S_{p_3}$ の交点は、$\varepsilon \to 0$ の極限に飛ばしたときの勾配 Y 字グラフに対応する。ただし、この勾配 Y 字グラフは、辺上に Morse 関数の臨界点が現れ、非常に複雑な形をしている。

(5) 残念ながら、現時点では、境界付き多様体の Morse ホモロジーにおける勾配 tree グラフの数え上げの明示的な表示は得られていない。その理由は、臨界点の不安定多様体および安定多様体たちの境界における交叉を横断的にするために、写像 $\varphi_\varepsilon : M \to M$ を用いてそれらを摂動し、交点を取り出しているが、その交点と勾配 tree グラフとの対応をつけるために、$\varepsilon \to 0$ とすると、勾配 tree グラフの辺上に臨界点が現れ、ポキポキと所々折れた複雑な勾配 tree グラフに収束し、そのような勾配 tree グラフの数え上げが複雑すぎて、現時点では明示的な記述に成功していないためである。

(6) もし、この報告書を読んで、境界付き多様体の Morse ホモロジーにおける勾配 tree グラフの数え上げによる高次積構造の明示的な表示と、その、凹型の無限遠を持つシンプレクティック多様体における Lagrange 部分多様体の Floer 理論にご興味を持っていただける方がいらっしゃいましたら、是非今後のご参考にしていただければと願うばかりです。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計0件

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

７．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
East Asian Symplectic Conference 2019	2019年～2019年

８．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関